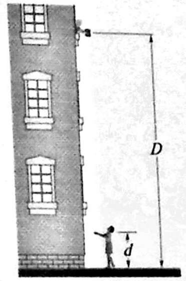
۱●- شما کتابی به جرم ۲/۰۰kg را به طرف دوستی که روی زمین ایستاده است از فاصلهٔ $D=۱۰/۰\text{m}$ بالای سطح زمین رها می‌کنید. اگر دوست شما دستهایش را تا ارتفاع $d=۱/۵۰\text{m}$ بالای سطح زمین کشیده باشد (شکل ۸-۳۰)، (الف) در فاصلهٔ رها شدن کتاب تا رسیدن آن به دستهای دوست شما چقدر کار W_g توسط نیروی گرانشی روی کتاب انجام می‌شود؟ (ب) تغییر ΔU انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه کتاب- زمین در حین سقوط کتاب چقدر است؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی U این دستگاه در سطح زمین برابر صفر در نظر گرفته شود، (پ) هنگامی که کتاب رها شده است و (ت) هنگامی که به دستهای دوستتان می‌رسد، U چقدر است؟ حال U را در سطح زمین برابر ۱۰۰J در نظر بگیرید و دوباره مقدارهای زیر را بیابید: (ث) W_g، (ج) ΔU، (چ) U در نقطهٔ رها شدن، و (ح) U در محل دستهای دوستتان.



شکل ۸-۳۰ مسئله‌های ۱ و ۱۰

حل: (الف) کار انجام شده توسط نیروی گرانش

$$W = m\vec{g}\cdot\vec{h} = mg(D-d) = ۲\times۹/۸(۱۰-۱/۵) = ۱۶۶/۶\text{J}$$

(ب) انرژی پتانسیل برابر است با mgy

$$\Delta U = mgy_f - mgy_i = mg(y_f - y_i) = ۲\times۹/۸(۱/۵-۱۰)$$
$$= -۱۶۶/۶J$$

(پ) $U_۱ = mgD = ۲\times۹/۸\times۱۰ = ۱۹۶\text{J}$

(ت) $U_۲ = mgd = ۲\times۹/۸\times۱/۵ = ۲۹/۷\text{J}$

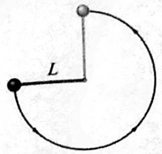
(ث) $W_g = m\vec{g}\cdot\vec{h} = mg(D-d) = ۱۶۶/۶\text{J}$

(ج) $\Delta U = U_f - U_i = mg(y_f - y_i) = -۱۶۶/۶\text{J}$

(چ) $U_۰ = ۱۰۰$ $U_۱ = U_۰ + mgD = ۲۹۶\text{J}$

(ح) $U_۰ = ۱۰۰$ $U_۲ = U_۰ + mgh = ۱۲۹/۴\text{J}$

۲●- شکل ۸-۳۱ گلوله‌ای به جرم $m=۰/۳۴۱\text{kg}$ را نشان می‌دهد که به انتهای میلهٔ نازکی به طول $L=۰/۴۵۲\text{m}$ وجرم ناچیز متصل شده است. انتهای دیگر میله طوری لولا شده است که گلوله می‌تواند در یک دایرهٔ عمودی حرکت کند. میله مطابق شکل به طور افقی نگهداشته می‌شود و آنگاه توسط نیروی رو به پایینی طوری هل داده می‌شود که گلوله به پایین تاب بخورد و پس از گردش دقیقاً به موضع قائمی برسد که در آنجا تندی‌اش صفر است. چقدر کار توسط نیروی گرانشی روی گلوله از نقطهٔ ابتدایی تا (الف) پایینترین نقطه، (ب) بالاترین نقطه، و (پ) نقطه‌ای در طرف راست که هم‌سطح نقطهٔ ابتدایی است، انجام شده است؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله- زمین در نقطهٔ ابتدایی برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن وقتی که گلوله به (ت) پایینترین نقطه، (ث) بالاترین نقطه، و (ج) نقطه‌ای در طرف راست که هم‌سطح نقطهٔ ابتدایی است برسد، چقدر است؟ (چ) فرض کنید میله با نیروی بیشتری هل داده شود، به گونه‌ای که گلوله از بالاترین نقطه با تندی غیر صفر عبور کند. آیا در این صورت ΔU_g از پایینترین نقطه تا بالاترین نقطه بیشتر می‌شود یا کمتر یا برابر همان مقداری می‌شود که در حالت توقف در بالاترین نقطه داشت؟



شکل ۸-۳۱ مسئله‌های ۲ و ۱۲

حل: (الف) کار نیروی وزن

$$W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = mgl = ۰/۳۴۱\times۹/۸\times۰/۴۵۲ = ۱/۵۱\text{J}$$

(ب) چون نیرو و جابه‌جایی خلاف جهت هستند

$$W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = -mgl = -۱/۵۱\text{J}$$

(پ) چون تغییر ارتفاع صفر است $W_g = ۰$

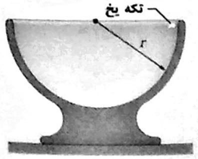
(ت) $U = mgy = -mgl = -۱/۵۱\text{J}$

(ث) $U = mgy = mgl = ۱/۵۱\text{J}$

(ج) $U = mgy = mg\times۰ = ۰$

(چ) چون ΔU_g فقط به تغییر ارتفاع بستگی دارد، بنابراین حتی اگر سرعت تغییر کند، ΔU_g تغییر نمی‌کند.

۳●- در شکل ۸-۳۲، قطعه یخ کوچکی به جرم ۲/۰۰g از لبهٔ ظرف نیمکره شکلی با شعاع r برابر ۲۲/۰cm رها شده است. (الف) در حین پایین آمدن یخ تا ته ظرف چقدر کار روی قطعه یخ توسط نیروی گرانشی انجام شده است؟ (ب) در حین پایین آمدن، انرژی پتانسیل دستگاه قطعه یخ- زمین چقدر تغییر می‌کند؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل در ته ظرف برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن در هنگام رها شدن قطعه یخ چقدر است؟ (ت) اگر، به جای آن، انرژی پتانسیل در نقطهٔ رها شدن برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن هنگامی که قطعه یخ به ته ظرف می‌رسد چقدر است؟ (ث) اگر جرم قطعه یخ دو برابر شود، مقدارهای پاسخهای (الف) تا (ت) افزایش می‌یابند یا کاهش یا تغییر نمی‌کنند؟ **SSM**



شکل ۸-۳۲ مسئله‌های ۳ و ۱۱

حل: (الف)

$$W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = mgr = ۲\times۱۰^{-۳}\times۹/۸\times۲۲\times۱۰^{-۲}$$
$$= ۴/۳۱۲\times۱۰^{-۳}\ \text{J}$$

$$\Delta U = mg\Delta y = -mgr = -۴/۳۱۲\times۱۰^{-۳}\ \text{J}$$

(ب) کم می‌شود.

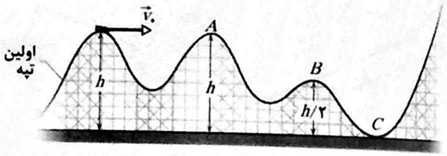
$$U = U_۰ + mgy = ۰ + mgr = ۴/۳۱۲\times۱۰^{-۳}\ \text{J}$$

(پ) $U = U_۰ + mgy = ۰ - mgr = -۴/۳۱۲\times۱۰^{-۳}\ \text{J}$

(ت)

(ث) تمام پاسخ‌ها به جرم بستگی دارند. پس دو برابر می‌شوند.

۴●- در شکل ۸-۳۳، یک قطار تفریحی به جرم $m=۸۲۵\text{kg}$ که بر مسیری بدون اصطکاک حرکت می‌کند با تندی $v_۰=۱۷/۰\text{m/s}$ به بالای اولین بلندی به ارتفاع $h=۴۲/۰\text{m}$ می‌رسد. نیروی گرانشی از این نقطه تا (الف) نقطهٔ A، (ب) نقطهٔ B، و (پ) نقطهٔ C چقدر کار روی قطار انجام می‌دهد؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطار- زمین در نقطهٔ C برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن هنگامی که قطار در (ت) نقطهٔ B و (ث) نقطهٔ A قرار دارد، چقدر است؟ (ج) اگر جرم m دو برابر شود، آیا تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه میان نقطه‌های A و B افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟



شکل ۸-۳۳ مسئله‌های ۴ و ۱۳

حل: (الف) نیروی گرانش هیچ کاری انجام نمی‌دهد.

$$W_g = U_i - U_f = -mg\Delta y = ۰ \qquad \Delta y = h-h$$

(ب) $W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = \frac{۱}{۲}mgh = \frac{۱}{۲}\times۸۲۵\times۹/۸\times۴۲$

$$= ۱/۷\times۱۰^{۵}\ \text{J}$$

(پ) $W_g = U_i - U_f = mgh - ۰ = ۹/۸\times۸۲۳\times۴۲$

$$= ۳/۴\times۱۰^{۵}\ \text{J}$$

(ث) $U = mgy = ۳/۴\times۱۰^{۵}\ \text{J}$

(ج) چون انرژی پتانسیل با جرم رابطهٔ مستقیم دارد. پس تغییر در انرژی پتانسیل میان A و B دو برابر می‌شود.

۵●- هرگاه فنری ۷/۵cm نسبت به طول واهلیده‌اش فشرده شود، ۲۵J انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می‌کند. ثابت فنر چقدر است؟ **SSM**

حل:

$$U = \frac{۱}{۲}kx^{۲}$$

$$k = \frac{۲U}{x^{۲}} = \frac{۲\times۲۵\text{J}}{(۷/۵\times۱۰^{۳})^{۲}} = ۸/۹\times۱۰^{۳}\ \text{N/m}$$

۶●- گلولهٔ برفی به جرم ۱/۵۰kg از بالای صخره‌ای به ارتفاع ۱۲/۵m پرتاب شده است. سرعت اولیهٔ گلوله ۱۴/۰m/s در

راستای °۴۱/۰ بالای افق است. (الف) تا رسیدن گلولهٔ برف تا زمین تخت پایین صخره، نیروی گرانشی چقدر کار روی گلولهٔ برف انجام داده است؟ (ب) در حین این حرکت، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلولهٔ برف- زمین چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل گرانشی در بالای صخره برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن به هنگام رسیدن گلولهٔ برف به سطح زمین چقدر است؟

حل: (الف) کار نیروی وزن برابر است

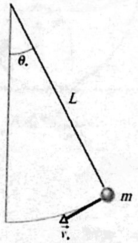
$$d = h$$
$$W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = mgh = ۱/۵\times۹/۸\times۱۲/۵ = ۱۸۳/۷۵\text{J}$$

(ب) $\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg(۰-۱۲/۵) = -۱۸۳/۷۵\text{J}$

(پ) $U = ۰ + mg(-h) = -mgh$

انرژی منفی است. $U = -۱۸۳/۷۵\text{J}$

۷●●- شکل ۸-۳۴ میلهٔ باریکی به طول $L=۲/۰۰\text{m}$ و جرم ناچیز را نشان می‌دهد که می‌تواند در یک انتها حول محوری روی دایرهٔ قائمی بچرخد. گلوله‌ای به جرم $m=۵/۰۰\text{kg}$ به انتهای دیگر میله متصل شده است. میله را تا زاویهٔ $\theta_۰=۳۰/۰°$ به یک طرف می‌کشیم و سپس با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_۰=۰$ رها می‌کنیم. وقتی گلوله به پایینترین نقطهٔ مسیرش می‌رسد، (الف) نیروی گرانشی چقدر کار روی گلوله انجام



شکل ۸-۳۴ مسئله‌های ۷، ۱۶ و ۱۷

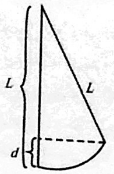
می‌دهد؟ و (ب) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله- زمین چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل گرانشی در پایینترین نقطه برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن درست در لحظهٔ رها شدن گلوله چقدر است؟ (ت) اگر زاویهٔ θ افزایش یابد، آیا بزرگی پاسخهای (الف) تا (پ) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟

$$W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = mgd$$

الف)

d جابجایی است در راستای قائم که برابر است با $L(۱-\cos\theta)$

$$W_g = ۵\times۹/۸\times۲\times(۱-\cos۳۰°) = ۱۳/۱\text{J}$$



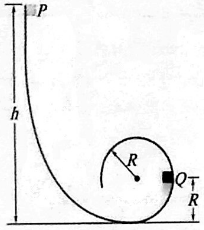
$\Delta u = U_f - U_i = -W_g = -13.1\,J$

(ب) $\Delta U = U_0 - U = 0 - U \Rightarrow U = -\Delta U = 13.1\,J$

(پ)

(ت) اگر زاویهٔ θ افزایش یابد، ارتفاع گلوله هم افزایش می‌یابد. پس انرژی‌ها افزایش می‌یابند و کار بیشتر می‌شود.

✓ ۸●●- در شکل ۸-۳۵ قطعهٔ کوچکی به جرم $m = 0.032\,kg$ می‌تواند بر مسیر خمیدهٔ بدون اصطکاکی که شعاع حلقهٔ آن $R = 12\,cm$ است بلغزد. قطعه از حالت سکون در نقطهٔ P به ارتفاع $h = 5.0R$ بالاتر از کف حلقه رها می‌شود. به هنگام حرکت از نقطهٔ P تا (الف) نقطهٔ Q و (ب) بالای حلقه، نیروی گرانشی چقدر کار روی قطعه انجام می‌دهد؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطعه- زمین در پایین حلقه صفر در نظر گرفته شود، انرژی پتانسیل آن در (پ) نقطهٔ P، (ت) نقطهٔ Q، و (ث) بالای حلقه چقدر است؟ (ج) اگر قطعه را به جای رها کردن با تندی اولیهٔ رو به پایین در امتداد مسیر بلغزانیم، آیا پاسخهای (الف) تا (ث) افزایش می‌یابند یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌مانند؟



شکل ۸-۳۵ مسئله‌های ۸ و ۱۹

حل: (الف) $W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d}$

d جابجایی است.

$W_g = mg(5R - R) = 4mgR$

$W_g = 4\times 0.032\times 9.8\times 12\times 10^{-2} = 0.15\,J$

(ب) $W = m\vec{g}\cdot\vec{d} = mg(5R - 2R) = 3mgR = 0.11\,J$

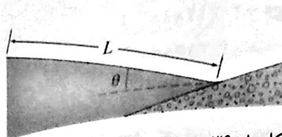
(پ) $U = U_0 + mgh = 0 + mg5R = 0.032\times 9.8\times 0.12\times 5 = 0.19\,J$

(ت) $U = U_0 + mgh = 0 + mgR = 0.032\times 9.8\times 0.12 = 0.038\,J$

(ث) $U = U_0 + mgh = 0 + mg2R = 0.075\,J$

(ج) چون کار نیروی وزن و انرژی پتانسیل دستگاه قطعه- زمین فقط به جرم و تغییر ارتفاع بستگی دارند. پس هیچ کدام از جوابها تغییر نمی‌کنند.

۹●- در شکل ۸-۳۶ کامیونی که ترمز آن بریده است درست پیش از آنکه راننده آن را به شیب فرار اضطراری بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب رو به بالای $\theta = 15^\circ$ هدایت کند، با تندی ۱۳۰km/h در امتداد یک سراشیبی به طور غیر قابل کنترلی حرکت می‌کند. جرم کامیون 1.2×10^4 kg است. (الف) کمترین طول L شیب اضطراری باید چقدر باشد تا کامیون (به طور لحظه‌ای) متوقف شود؟ (فرض کنید کامیون یک ذره است و این فرض را توجیه کنید.) (ب) اگر جرم کامیون کاهش یابد، و (پ) اگر تندی آن کاهش یابد، آیا طول کمینهٔ L افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟ SSM



شکل ۸-۳۶ مسئله ۹

حل: (الف) چون اصطکاک نداریم، انرژی پایسته می‌ماند.

$v_i = 130\,km/h = 36.11\,m/s$

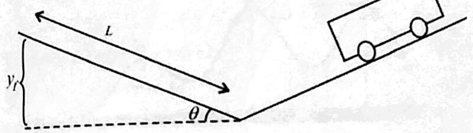
$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$

$y_f = L\sin\theta$

$y_i = 0$

برای اینکه L را بدست آوریم. فرض می‌کنیم سرعت در آنجا برابر صفر باشد یعنی $v_f = 0$.

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mgL\sin\theta \Rightarrow L = \frac{v_i^2}{2g\sin\theta} = \frac{(36.11)^2}{2\times 9.8\sin(15)^\circ} = 257\,m$$



(ب) و (پ) اگر تندی کاهش یابد، انرژی جنبشی اولیهٔ آن نیز کم می‌شود، پس طول L کاهش می‌یابد ولی جواب نهایی به جرم بستگی ندارد.

۱۰●- (الف) در مسئله ۱، تندی کتاب وقتی به دستهای دوستتان می‌رسد چقدر است؟ (ب) اگر کتاب دیگری را که جرمش دو برابر است جایگزین کنیم، تندی آن چقدر است؟ (پ) اگر، به جای این، کتاب را رو به پایین پرتاب کنیم آیا پاسخ (الف) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟

حل: از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

(الف) $E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$

$0 + mgD = \frac{1}{2}mv^2 + mgd \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg(D - d)$

$v^2 = 2g(D - d) \Rightarrow v = \sqrt{2\times 9.8\times(10 - 1.5)} = 12.9\,m/s$

(ب) مشاهده کردیم در رابطهٔ بالا، جرمها از طرفین ساده می‌شوند و جواب نهایی به جرم بستگی ندارد. پس تندی بدون تغییر باقی می‌ماند.

۱۱●- (الف) در مسئلهٔ ۳، تندی قطعه یخ وقتی به ته ظرف می‌رسد چقدر است؟ (ب) اگر قطعه یخ دیگری را که جرمش دو برابر است جایگزین کنیم، تندی آن چقدر می‌شود؟ (پ) اگر، به جای این، به قطعه یخ تندی اولیهٔ رو به پایینی در امتداد

سطح ظرف بدهیم، آیا پاسخ (الف) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟ SSM WWW

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. کف ظروف را مبدأ در نظر می‌گیریم.

$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$

$K_i = 0 \qquad U_i = mgr \qquad U_f = 0$

$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgr \Rightarrow v_f^2 = 2gr \Rightarrow v_f = \sqrt{2gr}$

$= \sqrt{2\times 9.8\times 0.22} = 2.08\,m/s$

(ب) جواب نهایی به جرم بستگی ندارد، و تندی بدون تغییر می‌ماند.

(پ) فرض کنیم تندی اولیهٔ v_0 باشد، پس:

$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgr = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gr$

چون انرژی اولیه افزایش یافته است، پایستگی انرژی ایجاب می‌کند انرژی نهایی نیز افزایش یابد. پس تندی نهایی زیادتر می‌شود.

۱۲●- (الف) در مسئله ۲، تندی اولیه‌ای که باید به گلوله داده شود تا با تندی صفر به مکان قائم در بالا برسد چقدر است؟ در این صورت تندی آن در (ب) پایینترین نقطه و (پ) نقطه‌ای در طرف راست که هم‌سطح نقطهٔ ابتدایی است، چقدر است؟ (ت) اگر جرم گلوله را دو برابر کنیم آیا پاسخهای (الف) تا (پ) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟

حل: (الف) ارتفاع اولیه را صفر در نظر می‌گیریم و از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم

$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgL$

$v_f = 0$

$v_i^2 = 2gL \Rightarrow v_i = \sqrt{2gL} = \sqrt{2\times 9.8\times 0.452} = 2.97\,m/s$

(ب) $E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgL$

$v_f^2 = v_i^2 + 2gL = 2gL + 2gL = 4gL \Rightarrow v_f = 2\sqrt{gL}$

$= 4.2\,m/s$

(پ) $E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$

$v_f = v_i \Rightarrow v_f = 2.97\,m/s$

(ت)جوابها تغییر نمی‌کنند.

۱۳●- در مسئلهٔ ۴، تندی قطار تفریحی در (الف) نقطهٔ A، (ب)نقطهٔ B، و (پ) نقطهٔ C چقدر است؟ (ت) قطار تفریحی تا چه ارتفاعی بر بلندی آخر که ارتفاع آن به حدی زیاد است که نمی‌تواند از آن عبور کند، بالا می‌رود؟ (ث) اگر قطار هوایی دیگری را که جرمش دو برابر است جایگزین کنیم، آنگاه پاسخهای (الف) تا (ت) چه می‌شوند؟ GO

حل: (الف) از پایستگی انرژی کل استفاده می‌کنیم.

$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$

$h_i = h_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = v_i = v_0 = 17\,m/s$

(ب)

$E_i = E_f$

$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$

$h_f = \frac{h}{2} \qquad h_i = h$

$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh/2$

$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}mgh \Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + gh$

$v_f = \sqrt{(17)^2 + 9.8\times 42} = 26.47\,m/s$ سرعت در نقطهٔ B

(پ) از پایستگی انرژی داریم:

$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$

$h_f = 0$

$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i \Rightarrow v_f^2 = \sqrt{v_i^2 + 2gh} = 33.35\,m/s$

سرعت در نقطهٔ C است.

(ت) قطار تا جایی بالا می‌رود که در آنجا سرعت آن صفر شود. از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم

$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = mgh_f$

$v_f = 0$

$h_f = \frac{v_i^2}{2g} + h_i \Rightarrow \frac{(17)^2}{2\times 9.8} + 42 = 56.74\,m$

تا ارتفاع ۵۶/۷۴m بالا می‌رود.

(ث) ملاحظه می‌شود که جواب پایانی هیچ گونه بستگی به جرم ندارد. پس جوابها تغییر نمی‌کنند.

۱۴●- (الف) در مسئله ۶، با استفاده از روشهای انرژی به جای روشهایی که در فصل ۴ مورد بحث قرار گرفتند، تندی گلولهٔ برف را به هنگام رسیدن به زمین پایین صخره به دست آورید. (ب) اگر زاویهٔ پرتاب به ۴۱° زیر افق تغییر کند و (پ) اگر جرم گلولهٔ برف ۲/۵۰kg شود، تندی گلولهٔ برف چقدر می‌شود؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$

$h_f = 0 \Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + 2gh_i$

$\Rightarrow v_f = \sqrt{(14)^2 + (2\times 9.8\times 12.5)} = 21\,m/s$

(ب) v که در انرژی جنبشی ظاهر می‌شود، اندازهٔ سرعت است. بنابراین چون اندازهٔ آن با تغییر راستا عوض نمی‌شود، سرعت نهایی دوبارهٔ ۲۱m/s است.

(پ) جواب نهایی به جرم بستگی ندارد.

۱۵●- گلوله‌ای به جرم $5/0\,g$ با استفاده از یک تفنگ فنری به طور قائم رو به بالا شلیک می‌شود. فنر باید به اندازهٔ $8/0\,cm$ فشرده شود تا گلوله دقیقاً به هدفی برسد که $20\,m$ بالای مکان گلوله روی فنر فشرده شده قرار دارد. (الف) در حین این صعود ۲۰ متری، تغییر ΔU_g انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله-زمین چقدر است؟ (ب) در حین پرتاب گلوله، تغییر ΔU_s انرژی پتانسیل کشسانی فنر چقدر است؟ (پ) ثابت فنر چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف) $\Delta u_g = U_{fg} - U_{ig} = mg(h_f - h_i) = mg\Delta h$

$$= 5\times10^{-3}\times9/8\times20 = 0/98\,J$$

(ب) $\Delta U_s = U_{fs} - U_{is}$

پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که انرژی اولیه دستگاه با انرژی نهایی آن برابر باشد. از آن جا که انرژی نهایی دستگاه $0/98\,J$ است، بنابراین، انرژی اولیهٔ آن نیز $0/98\,J$ است.

$$U_{is} = 0/98\,J$$

(پ) $\frac{1}{2}kx^2 = U_i \Rightarrow k = \frac{2U_i}{x^2} = \frac{2\times0/98}{64\times10^{-4}} = 306/25\,N/m$

۱۶●●- (الف) در مسئلهٔ ۷، تندی گلوله در پایینترین نقطه چقدر است؟ (ب) اگر جرم گلوله افزایش یابد آیا تندی آن افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

$$v_i = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mg(h_i - h_f) = mg\Delta h = mgL(1-\cos\theta)$$

$$v_f = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

$$v_f = \sqrt{2\times9/8\times2\times(1-\cos30^\circ)} = 2/29\,m/s$$

(ب) جواب نهایی به جرم بستگی ندارد. پس تندی نهایی تغییر نمی‌کند.

۱۷●●- شکل ۸-۳۴ آونگی به طول $L = 1/25\,m$ را نشان می‌دهد. تندی وزنهٔ آونگ (که به طور مؤثری جرم کل آونگ را دارد) در لحظه‌ای که ریسمان با خط قائم زاویهٔ $\theta_0 = 40/0^\circ$ را می‌سازد، برابر با v_0 است. (الف) اگر $v_0 = 8/00\,m/s$ باشد، تندی وزنهٔ آونگ در لحظه‌ای که در پایینترین مکانش قرار دارد چقدر است؟ اگر آونگ رو به پایین تاب بخورد و سپس تا (ب) وضعیت افقی و (پ) وضعیت قائم به گونه‌ای بالا برود که ریسمان به وضعیت مستقیم برسد، کمترین مقداری که v_0 می‌تواند داشته باشد چقدر است؟ (ت) اگر θ_0 به اندازهٔ چند درجه افزایش یابد آیا پاسخهای (ب) و (پ) افزایش می‌یابند یا کاهش، یا بدون تغییر باقی می‌مانند؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + mg(h_i - h_f)$$

$$h_i - h_f = \Delta h = L(1-\cos\theta) \qquad v_i = v_0$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gL(1-\cos\theta)$$

$$v_f = \sqrt{64 + 2\times9/8\times1/25(1-\cos40^\circ)} = 8/35\,m/s$$

(ب) برای آنکه به وضعیت افقی برسد، فرض می‌کنیم سرعت در آنجا صفر باشد.

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = 0 + mgh_f$$

$$v_i = v_0$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h_f - h_i) \Rightarrow v_0^2 = 2g(h_f - h_i)$$

اگر مبدأ را افق بگیریم آنگاه $h_i = L\cos\theta$ و $h_f = 0$

$$v_0^2 = 2gL\cos\theta$$

$$v_0 = \sqrt{2\times9/8\times1/25\times\cos(40^\circ)} = 4/33\,m/s$$

(ژ) در وضعیت قائم. فرض می‌کنیم $v_f = 0$ باشد، در آن صورت $h_i = L\cos\theta, h_f = L$ که از افق سنجیده شده‌اند.

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

$$v_i = v_0$$

$$v_f = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL(1+\cos\theta) \Rightarrow v_0^2 = \sqrt{2gL(1+\cos\theta)}$$

$$v_0 = \sqrt{2\times9/8\times1/25(1+\cos40^\circ)} = 6/58\,m/s$$

(ت) اگر θ افزایش یابد، $\cos\theta$ کاهش می‌یابد. پس جواب‌های ب و پ کوچکتر می‌شوند.

۱۸●●- قطعه‌ای به جرم $700\,g$ از حالت سکون و از ارتفاع h_0 بالای یک فنر قائم با ثابت فنر $k = 400\,N/m$ و جرم ناچیز رها شده است. قطعه به فنر می‌چسبد و پس از فشردن آن به اندازهٔ $19/0\,cm$ به توقف لحظه‌ای می‌رسد. چه مقدار کار توسط (الف) قطعه روی فنر و (ب) فنر روی قطعه، انجام شده است؟ (پ) مقدار h_0 چقدر است؟ (ت) اگر قطعه از ارتفاع $2/00h_0$ بالای فنر رها شود، فشردگی بیشینهٔ فنر چقدر است؟

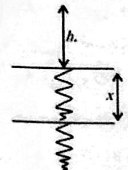
حل: (الف) کار انجام شده توسط قطعه روی فنر برابر است با $\frac{1}{2}kx^2$ پس:

$$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times400\times(0/19)^2 = 7/22\,J$$

(ب) کار انجام شده توسط فنر روی قطعه $-\frac{1}{2}kx^2$ است.

$$W = -\frac{1}{2}kx^2 = -7/22\,J$$

(پ) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. مبدأ را نقطهٔ فشردگی فنری می‌گیریم. ارتفاع اولیه $h_0 + x$ است.



$$E_i = E_f$$

$$E_i = mg(h_0 + x) \qquad E_f = \frac{1}{2}kx^2$$

$$mg(h_0 + x) = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow mgh_0 = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

$$h_0 = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{mg} - x \Rightarrow h_0 = \frac{7/22}{0/7\times9/8} - 0/19 = 0/86\,m$$

(ث) دوباره از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم و مبدأ را نقطهٔ فشردگی فنر می‌گیریم

$$E_i = E_f$$

$$mg(2h_0 + x) = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mgx - 2mgh_0 = 0$$

$$x^2 - 2\frac{mg}{k}x - 4\frac{mg}{k}h_0 = 0$$

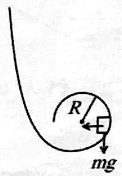
از حل معادلهٔ بالا بدست می‌آوریم.

$$x = 0/261\,m$$

۱۹●●- در مسئله ۸، بزرگیهای (الف) مؤلفهٔ افقی و (ب) مؤلفهٔ قائم نیروی *برایند* وارد بر قطعه در نقطهٔ Q چقدر است؟ (پ) قطعه را از حالت سکون از چه ارتفاع h باید رها کرد تا در بالاترین نقطهٔ حلقه در آستانهٔ قطع تماس با مسیر قرار گیرد؟ (در *آستانهٔ قطع تماس* به این معناست که نیروی عمودی وارد بر قطعه از طرف مسیر، از آن پس مقدارش صفر است.) (ت) بزرگی نیروی عمودی وارد بر قطعه در بالای حلقه را برحسب ارتفاع اولیهٔ h، برای گسترهٔ $h = 0$ تا $h = 6R$ رسم کنید.

حل: (الف) نیروی افقی برابر است با نیروی جانب مرکز

$$m\frac{v^2}{R}$$



مقدار $\frac{mv^2}{R}$ را با استفاده از بقای انرژی می‌یابیم.

$$E_i = E_f \Rightarrow mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mg(h_i - h_f)$$

$$mv_f^2 = 2mg(5R - R) = 8mgR \Rightarrow \frac{mv_f^2}{R} = 8mg$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{R} = 8\times0/032\times9/8 = 2/5\,N$$

(ب) نیروی قائم همان نیروی وزن است.

$$mg = 0/032\times9/8 = 0/31\,N$$

(پ) برای قطعه می‌نویسیم

$$mg + N = m\frac{v_f^2}{R}$$

که در آن N نیروی عمودی رو به بالاست. برای آستانهٔ قطع تماس $N = 0$ است. پس $mg = m\frac{v_f^2}{R}$. ارتفاع را با پایستگی انرژی می‌یابیم:

$$E_i = E_f \Rightarrow mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg2R$$

$$mgh_i = \frac{1}{2}mgR + 2mgR \Rightarrow h_i = \frac{5}{2}R = 0/3\,m$$

(ت)

$$mg + N = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = -mg + m\frac{v^2}{R}$$

$$E_i = E_f \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh - 2mgR$$

$$\frac{mv^2}{R} = 2mg\frac{h}{R} - 4mg$$

مقدار $\frac{mv^2}{R}$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$N = 2mg\frac{h}{R} - 5mg$$

۲۰●●- تک نیروی پایستار $\vec{F} = (6/0x - 12)\hat{i}\,N$، که در آن x برحسب متر است، بر ذره‌ای که در امتداد محور x حرکت می‌کند وارد می‌شود. انرژی پتانسیل U وابسته به این نیرو در $x = 0$ برابر $27\,J$ است. (الف) رابطه‌ای برای U به صورت تابعی از x بنویسید که در آن U برحسب ژول و x برحسب متر باشد. (ب) بیشینهٔ انرژی پتانسیل مثبت چقدر است؟ در چه مقدار (پ) منفی و (ت) مثبتی از x، انرژی پتانسیل برابر با صفر است؟

حل: (الف)

$$\Delta U(x) = U(x) - U(0) = -\int_0^x F(x)dx = -\int_0^x (6x - 12)dx$$

$$u(x) - 27 = (-3x^2 - 12x) \Rightarrow u(x) = -3x^2 + 12x + 27$$

(ب) برای یافتن بیشینه، از انرژی پتانسیل مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow -6x + 12x = 0 \Rightarrow x = 2$$

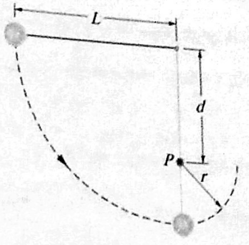
$$U(2) = -3\times4 + 12\times2 + 27 = 39\,J$$

(پ) و (ث)

$$-3x^2 + 12x + 27 = 0$$

$$x = -1/6\,m \quad و \quad x = 5/6\,m$$

۲۱●●- به یک سر ریسمان شکل ۸-۳۷ که طول آن $L = 120\,cm$ است گلوله‌ای متصل شده، و سر دیگر آن در جایی ثابت شده است. فاصلهٔ d از انتهای ثابت شده تا نقطهٔ P که در آنجا میخی کوبیده شده، $75/0\,cm$ است. وقتی گلوله‌ای که در ابتدا ساکن است مطابق شکل از وضعیتی که در آن ریسمان افقی است رها شود، گلوله در امتداد کمان خط چین تاب می‌خورد. هنگامی که گلوله (الف) به پایینترین نقطه‌اش و (ب) بالاترین نقطه‌اش پس از گیر کردن ریسمان در میخ می‌رسد، تندی گلوله چقدر است؟ **ILW**



شکل ۸-۳۷ مسئله‌های ۲۱ و ۶۸

حل: (الف) از بقای انرژی استفاده می‌کنیم

$E_i = E_f \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - mgL \Rightarrow v_f^۲ = ۲gL$

$v_f = \sqrt{۲\times ۹/۸ \times ۱/۲} = ۴/۸۵ m/s$

(ب) دوباره از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

$E_i = E_f \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - mg(L-۲r)$

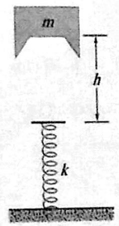
$r = L - d \Rightarrow ۲r = ۲L - ۲d$

$۰ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - mg(L-۲L+۲d) \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - mg(۲d-L)$

$\Rightarrow v_f^۲ = ۲g(۲d-L)$

$v_f = \sqrt{۲\times ۹/۸(۱/۵-۱/۲)} = ۲/۴۲ m/s$

۲۲●●- قطعه‌ای به جرم $m=۲/۰kg$ از ارتفاع $h=۴۰cm$ روی فنری با ثابت فنر $k=۱۹۶۰N/m$ رها می‌شود (شکل ۸-۳۸). فاصلهٔ بیشینه‌ای را که فنر فشرده می‌شود پیدا کنید.



شکل ۸-۳۸ مسئلهٔ ۲۲

حل: از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. نقطه‌ای با بیشترین فشردگی فنر را مبدأ در نظر می‌گیریم.

$E_i = E_f \Rightarrow mg(h+x) = \frac{۱}{۲}kx^۲$

$\frac{۱}{۲}kx^۲ - mgx - mgh = ۰ \Rightarrow kx^۲ - ۲mgx - ۲mgh = ۰$

از حل معادلهٔ درجهٔ ۲ داریم:

$x = \frac{۱}{k}\left[mg \pm \sqrt{m^۲g^۲ + ۲mgkh}\right]$

با عددگذاری بدست می‌آوریم $x = ۰/۱m$ و $(x>۰)$

۲۳●●- در لحظهٔ $t=۰$، گلوله‌ای به جرم ۱/۰kg از بالای برج بلندی با سرعت اولیهٔ $\vec{v} = (۱۸m/s)\hat{i} + (۲۴m/s)\hat{j}$ پرتاب شده است. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ΔU دستگاه گلوله- زمین بین دو لحظهٔ $t=۰$ و $t=۶/۰s$ (که هنوز در سقوط آزاد است) چقدر است؟

حل: سرعت ذره در راستای x تغییر نمی‌کند. اما در راستای yها داریم:

$v_y = -gt + v_{۰y} \Rightarrow v_y = -۹/۸\times ۶ + ۲۴ = -۳۴/۸ m/s$

بر طبق بقای انرژی داریم:

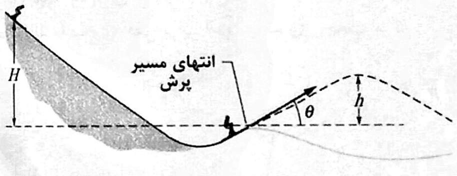
$E_i = E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + mgh_i = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ + mgh_f$

$\frac{۱}{۲}m(v_i^۲ - v_f^۲) = mg(h_f - h_i) = \Delta U_g$

$\Delta U_g = \frac{۱}{۲}\times ۱\times((۱۸)^۲ + (۲۴)^۲ - (۱۸)^۲ - (۳۴/۸)^۲)$

$\Delta U_g = \frac{۱}{۲}((۲۴)^۲ - (۳۴/۸)^۲) = -۳۱۷/۵۲J$

۲۴●●- اسکی بازی به جرم ۶۰kg از ارتفاع $H=۲۰m$ بالای سطح شیبدار پرش از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. (شکل ۸-۳۹). وقتی اسکی باز مسیر پرش را ترک می‌کند، بردار سرعت او با افق زاویهٔ $\theta = ۲۸°$ می‌سازد. از مقاومت هوا چشمپوشی و فرض کنید که مسیر پرش بدون اصطکاک است. (الف) ارتفاع بیشینهٔ h که اسکی باز پس از انتهای مسیر پرش به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) اگر او وزن خود را با گذاشتن یک کوله پشتی افزایش دهد، آیا ارتفاع h بزرگتر می‌شود یا کوچکتر، یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟



شکل ۸-۳۹ مسئلهٔ ۲۴

حل: (الف)

با استفاده از پایستگی انرژی تندی و سرعت اسکی‌باز در راستای مسیر پرش می‌یابیم. اسکی باز تا جایی بالا می‌رود که سرعت عمودی آن صفر شود.

$E_i = E_f \Rightarrow mgh = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ \Rightarrow v_f^۲ = ۲gH$

$v_f = \sqrt{۲\times ۹/۸\times ۲۰} = ۱۹/۸m/s$

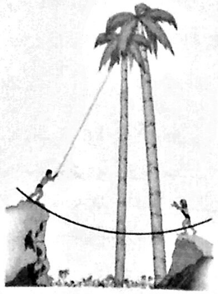
$(v_f)_y = v_f \sin\theta = ۱۹/۸\times \sin(۲۸°) = ۹/۳m/s$

$h = \frac{(v_f)_y^۲}{۲g} = \frac{۸۶/۴۹}{۲\times ۹/۸} = ۴/۴۱m$

(ب) ملاحظه می‌شود جواب نهایی به جرم بستگی ندارد.

۲۵●●- تارزان به وزن ۶۸۸ N در حالی که انتهای شاخهٔ نرم درختی به طول ۱۸m را در دست دارد از بالای صخره‌ای تاب می‌خورد (شکل ۸-۴۰). او از بالای صخره تا پایینترین نقطهٔ مسیر تاب، به اندازهٔ ۳/۲ m پایین می‌آید. اگر نیروی وارد بر

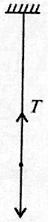
شاخهٔ درخت از ۹۵۰N بیشتر شود، شاخهٔ درخت می‌شکند. (الف) آیا شاخهٔ درخت می‌شکند؟ (ب) اگر نمی‌شکند، بیشترین نیروی وارد بر آن در حین تاب خوردن چقدر است؟ اگر می‌شکند، در چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم می‌شکند؟



شکل ۸-۴۰ مسئلهٔ ۲۵

حل: (الف) در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر داریم

$T - mg = m\frac{v^۲}{R}$ $T = mg + \frac{mv^۲}{R}$



T را می‌یابیم. از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

$E_i = E_f \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - mgh$

$\frac{۱}{۲}mv_f^۲ = mgh$ $h = ۳/۲m$

$\frac{mv_f^۲}{R} = \frac{۲mgh}{R} \Rightarrow \frac{mv_f^۲}{R} = ۲\times \frac{۶۸۸\times ۳/۲}{۱۸} = ۲۴۴/۶N$

$T = ۶۸۸ + ۲۴۴/۶ = ۹۳۲/۶N$

بنابراین شاخه نمی‌شکند.

(ب) نیروی بیشینه در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر وارد می‌آید که برابر است با مقدار محاسبه شده برای T.

۲۶●●- آونگی شامل یک سنگ ۲/۰ کیلوگرمی است که با ریسمانی به طول ۴/۰m و جرم ناچیز تاب می‌خورد. هنگامی که سنگ از پایینترین نقطهٔ مسیرش می‌گذرد، دارای تندی ۸/۰m/s است. (الف) وقتی ریسمان با خط قائم زاویهٔ ۶۰° می‌سازد، تندی سنگ چقدر است؟ (ب) بزرگترین زاویه‌ای که ریسمان در حین حرکت سنگ با خط قائم می‌سازد چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل دستگاه آونگ- زمین در پایینترین نقطهٔ سنگ برابر صفر در نظر گرفته شود، انرژی مکانیکی کل دستگاه چقدر است؟

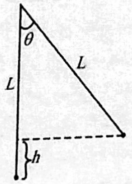
حل: (الف) از بقای انرژی استفاده می‌کنیم:

$E_i = E_f$

$\frac{۱}{۲}mv_i^۲ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ + mgh$ $h = L(۱-\cos\theta)$

$v_f^۲ = v_i^۲ - ۲gL(۱-\cos\theta)$

$v_f^۲ = ۶۴ - ۱۹/۶\times ۴(۱-\cos ۶۰) \Rightarrow v_f = ۴/۹۸ m/s$



(ب) ارتفاع بیشینهٔ بالا رفتن را می‌یابیم

$E_i = E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_i^۲ = mgh' \Rightarrow h' = \frac{v_i^۲}{۲g}$

$h' = \frac{۶۴}{۱۹/۶} = ۳/۲۶m$

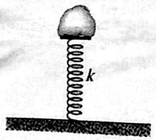
$h' = L(۱-\cos\theta) \Rightarrow ۱-\cos\theta = \frac{h'}{L} \Rightarrow \cos\theta = \frac{L-h'}{L}$

$\cos\theta = \frac{۴-۳/۲۶}{۴} = ۰/۱۸۵$

$\theta = ۷۹°$

(پ) $E = E_i = \frac{۱}{۲}(۲)(۸)^۲ = ۶۴J$

۲۷●●- شکل ۸-۴۱ سنگی به جرم ۸/۰۰kg را نشان می‌دهد که به حالت سکون روی فنری قرار دارد. فنر توسط سنگ به اندازهٔ ۱۰/۰cm فشرده شده است (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) سنگ به اندازهٔ ۳۰/۰cm دیگر رو به پایین فشرده و سپس رها می‌شود. انرژی پتانسیل کشسانی فنر درست پیش از رها شدن چقدر است؟ (پ) هنگامی که سنگ از نقطهٔ رها شدن تا ارتفاع بیشینه‌اش حرکت می‌کند، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه سنگ- زمین چقدر است؟ (ت) این ارتفاع بیشینهٔ نسبت به نقطهٔ رها شدن چقدر است؟ GO



شکل ۸-۴۱ مسئلهٔ ۲۷

حل: (الف) نیروی فنر با نیروی وزن برابر است

$mg = kx \Rightarrow k = \frac{mg}{x}$

$k = \frac{۸\times ۹/۸}{۰/۱} = ۷۸۴N/m$

(ب) $U = \frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}k(۰/۱+۰/۳)^۲ = \frac{۱}{۲}۷۸۴(۰/۴)^۲ = ۶۲/۷J$

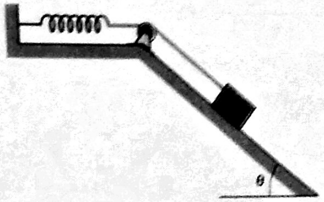
(پ) این تغییر انرژی با انرژی ذخیره شده در فنر برابر است. چون انرژی پایسته می‌ماند.

(ت) از بقای انرژی داریم:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}kx^۲ = mgh \Rightarrow h = \frac{\frac{۱}{۲}kx^۲}{mg}$$

$$h = \frac{۶۲/۷}{۸\times۹/۸} = ۰/۸\text{m}$$

۲۸●●- همان‌گونه که در شکل ۸-۴۲ نشان داده شده است، جعبه‌ای به جرم ۲/۰kg که روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta = ۴۰°$ قرار دارد توسط ریسمانی که به دور یک قرقره پیچیده شده به فنر سبکی با ثابت فنر $k = ۱۲۰\text{N/m}$ متصل شده است. وقتی فنر کشیده نشده است جعبه از حالت سکون رها می‌شود. فرض کنید قرقره بدون جرم و بدون اصطکاک است. (الف) وقتی جعبه ۱۰cm رو به پایین سطح شیبدار حرکت کند، تندی آن چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ نقطه‌ای که جعبه از آنجا رها شده تا نقطه‌ای که پس از لغزش روی سطح شیبدار در آنجا به توقف لحظه‌ای می‌رسد، چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت (رو به بالا یا رو به پایین شیب) شتاب جعبه در لحظه‌ای که جعبه به توقف لحظه‌ای می‌رسد چیست؟



شکل ۸-۴۲ مسئلهٔ ۲۸

حل: (الف) از بقای انرژی استفاده می‌کنیم

$$E_i = E_f$$

$$mgh_i = mgh_f + \frac{۱}{۲}kx^۲ + \frac{۱}{۲}mv_f^۲$$

$$\frac{۱}{۲}mv_f^۲ = mg(h_i - h_f) - \frac{۱}{۲}kx^۲$$

$$x\sin\theta = (h_i - h_f) \Rightarrow h_i - h_f = ۰/۱\times\sin(۴۰°)$$

$$\Rightarrow h_i - h_f = ۰/۰۶۴\text{m}$$

$$v_f^۲ = ۲g(h_i - h_f) - \frac{k}{m}x^۲$$

$$v_f^۲ = ۲\times۹/۸\times۰/۰۶۴ - \frac{۱۲۰}{۲}(۰/۱)^۲ = ۰/۶۵$$

$$v_f = ۰/۸۱\text{m/s}$$

(ب) جعبه‌ای در جایی متوقف می‌شود که انرژی پتانسیل گرانشی آن با انرژی کشسانی فنر برابر باشد.

$$x\sin\theta = h_i - h_f$$

$$mg(h_i - h_f) = \frac{۱}{۲}kx^۲$$

$$mg\,x\sin\theta = \frac{۱}{۲}kx^۲ \Rightarrow x = \frac{۲mg\sin\theta}{k}$$

$$= \frac{۲\times۱۹/۶\times\sin۴۰°}{۱۲۰} = ۰/۲۱\text{m}$$

(پ) نیروهای وارد بر جعبه عبارتند از نیروی وزن در راستای حرکت $(mg\sin\theta)$ و نیروی کشسانی فنر.

به پایین سطح $mg\sin\theta = ۱۲/۶\text{N}$

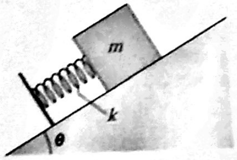
به بالای سطح $kx = ۲۵/۲\text{N}$

برآیند این نیروها برابر است با

به بالای سطح $F_{net} = (۲۵/۲ - ۱۲/۶)\text{N} = ۱۲/۶$

شتاب رو به بالاست $a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{۱۲/۶}{۲} = ۶/۳\text{m/s}^۲$

۲۹●●- قطعه‌ای به جرم $m = ۲/۰۰\text{kg}$ در برابر فنری روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta = ۳۰/۰°$ قرار دارد (شکل ۸-۴۳). (قطعه به فنر متصل نشده است.) فنر با ثابت فنر $k = ۱۹/۶\text{N/cm}$ به اندازهٔ ۲۰/۰cm فشرده شده و سپس رها می‌شود. (الف) انرژی پتانسیل کشسانی فنر فشرده شده چقدر است؟ (ب) تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطعه- زمین وقتی که قطعه از نقطهٔ رها شدن به بالاترین نقطه‌اش روی سطح شیبدار می‌رسد چقدر است؟ (پ) فاصلهٔ بالاترین نقطه از نقطهٔ رها شدن روی سطح شیبدار چقدر است؟ ILW



شکل ۸-۴۳ مسئلهٔ ۲۹

حل: (الف) $U = \frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}۱۹۶۰\times(۰/۲)^۲ = ۳۹/۲\text{J}$

(ب) چون انرژی پایستهٔ ماند، تمام انرژی ذخیره شده در فنر به انرژی ذخیره شده در دستگاه قطعه- زمین تبدیل می‌شود که مقدار آن عبارت است از ۳۹/۲J .

(پ) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

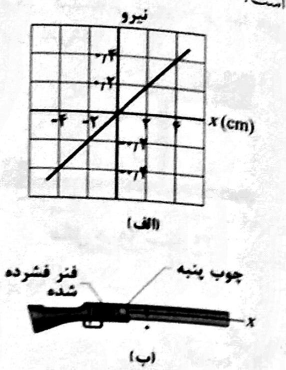
$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}kx^۲ = mgh$$

ارتفاع از حالت رها شدن $\Rightarrow h = \frac{\frac{۱}{۲}kx^۲}{gm} = \frac{۳۹/۲}{۱۹/۶} = ۲m$

روی سطح $d = \frac{h}{\sin\theta} = ۴\text{m}$

۳۰●●- شکل ۸-۴۴ الف مربوط به فنر یک تفنگ چوب پنبه‌ای (شکل ۸-۴۴ ب) است؛ این شکل، نیروی فنر را بر حسب تابعی از کشیدگی یا فشردگی فنر نشان می‌دهد. فنر به اندازهٔ ۵/۵cm فشرده می‌شود و برای به جلو راندن چوب پنبه‌ای به جرم ۳/۸g در تفنگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. (الف) اگر چوب‌پنبه در لحظه‌ای که فنر از موضع واهلیده‌اش عبور می‌کند رها شده باشد، تندی آن چقدر است؟ (ب) فرض کنید، این‌بار چوب پنبه به فنر بچسبد و پیش از آنکه از فنر جدا شود آن را

به اندازهٔ ۱/۵cm بکشد. اکنون تندی چوب پنبه در لحظهٔ رها شدن چقدر است؟



شکل ۸-۴۴ مسئله ۳۰

حل: با استفاده از نمودار، k را می‌یابیم.

$$F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{۰/۲}{۰/۰۲} = ۱۰\text{N/m}$$

(الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$v^۲ = \frac{k}{m}x^۲ \Rightarrow v^۲ = \frac{۱۰}{۳/۸\times۱۰^{-۳}}(۵/۵\times۱۰^{-۲})^۲ = ۷/۹$$

$$v = ۲/۸\text{m/s}$$

(ب) دوباره از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم $E_i = E_f$

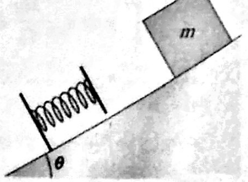
$$\frac{۱}{۲}kx_i^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}kx_f^۲$$

$x_i = ۵/۵\text{cm}$ $x_f = ۱/۵\text{cm}$

$$v^۲ = \frac{k}{m}(x_i^۲ - x_f^۲) = \frac{۱۰}{۳/۸\times۱۰^{-۳}}[۳۰/۲۵ - ۲/۲۵]\times۱۰^{-۴}$$

$$v^۲ = ۷/۳۷ \Rightarrow v = ۲/۷۱\text{m/s}$$

۳۱●●- در شکل ۸-۴۵، قطعه‌ای به جرم $m = ۱۲\text{kg}$ روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta = ۳۰°$ رها می‌شود. در پایین قطعه، فنری قرار دارد که می‌تواند با نیروی ۲۷۰N به اندازهٔ ۲/۰cm فشرده شود. وقتی فنر به اندازهٔ ۵/۵cm فشرده شود، قطعه به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود. (الف) قطعه روی سطح شیبدار چه فاصله‌ای را از حالت سکون تا نقطهٔ توقف لحظه‌ای طی می‌کند؟ (ب) تندی قطعه درست در لحظهٔ تماس با فنر چقدر است؟ SSM WWW



شکل ۸-۴۵ مسئله‌های ۳۱ و ۳۷

حل:

$$F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{۲۷۰}{۰/۰۲} = ۱۳۵۰۰\text{N/m}$$

(الف) در این حالت، تمام انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی ذخیره شده در فنر تبدیل می‌شود. مبدأ را جایی می‌گیریم که فنر فشرده شده است. از بقای انرژی استفاده می‌کنیم.

$$E_i = E_f \Rightarrow mgh = \frac{۱}{۲}kx^۲ \Rightarrow h = \frac{kx^۲}{۲mg}$$

$$h = \frac{۱۳۵۰۰\times(۰/۰۵۵)^۲}{۲\times۱۲\times۹/۸} = ۰/۱۷۴\text{m}$$

d مسافتی که روی سطح طی کرده است، برابر است با

$$\sin\theta = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{۰/۱۷۴}{۰/۵} = ۰/۳۴۸\text{m}$$

(ب) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. به این صورت که فاصلهٔ نقطهٔ رهای جسم تا فنر برابر است با $l = ۰/۳۴۸ - ۰/۰۵۵ = ۰/۲۹۳\text{m}$.

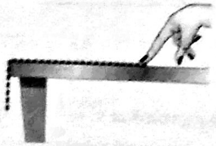
$$h' = l\sin\theta = ۰/۱۴۷\text{m}$$

از پایستگی انرژی داریم $E_i = E_f$

$$mgh' = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v^۲ = ۲gh' \Rightarrow v = \sqrt{۲gh'}$$

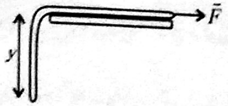
$$v = \sqrt{۲\times۹/۸\times۰/۱۴۷} = ۱/۷\text{m/s}$$

۳۲●●- در شکل ۸-۴۶، زنجیری روی میز بدون اصطکاکی طوری نگهداشته شده است که یک چهارم طول آن از لبهٔ میز آویزان باشد. اگر طول زنجیر $L = ۲۸\text{cm}$ و جرم آن $m = ۰/۰۱۲\text{kg}$ باشد، چقدر کار برای بالا کشیدن بخش آویخته به روی میز لازم است؟



شکل ۸-۴۶ مسئلهٔ ۳۲

حل: برای انجام کار باید با نیروی F زنجیر را بکشیم



این نیرو برابر است با وزن طول y (آویزان) زنجیر.

$$W = \int F(y)dy$$

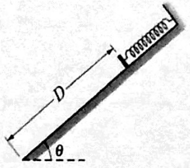
m جرم بخش آویزان و M جرم کل است.

$F(y) = mg$ $m = \lambda y = \frac{M}{L}y$

$$W = \int_۰^{\frac{۱}{۴}L} \frac{M}{L}yg\,dy = \frac{M}{L}g\frac{۱}{۲}y^۲\Big|_۰^{\frac{۱}{۴}} = \frac{M}{۲L}g\frac{L^۲}{۱۶}$$

$$W = \frac{MgL}{۳۲} = \frac{۰/۰۱۲\times۹/۸\times۰/۲۸}{۳۲} = ۰/۰۰۱\text{J}$$

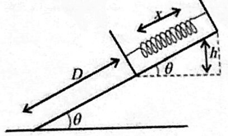
●●۳۳- در شکل ۸-۴۷، فنری بـا ثابـت فنـر $k=170\,N/m$ در بالای سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویـهٔ شـیب $\theta=37.0°$ قرار دارد. انتهای پایینی سطح شیبدار از سر آزاد فنر که در طول واهلیده‌اش است، $D=1.00\,m$ فاصله دارد. فنر با یک قوطی به جـرم $2.00\,kg$ بـه انـدازهٔ $0.200\,m$ فـشرده شـده و سـپس از حالت سکون رها می‌شود. (الف) تندی قـوطی در لحظـه‌ای کـه فنر دوباره به طول واهلیده‌اش می‌رسد (کـه ایـن، همـان زمـانی است که تماس قوطی با فنر قطع می‌شـود) چقـدر اسـت؟ (ب) تندی قوطی در لحظهٔ رسـیدن بـه پـایین سـطح شـیبدار چقـدر است؟



شکل ۸-۴۷ مسئله ۳۳

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

$$E_i=E_f$$
$$\frac{1}{2}kx^2+mgh=\frac{1}{2}mv^2+0$$



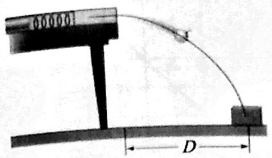
h تغییر ارتفاع است.

$$h=x\sin\theta$$
$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2+mgx\sin\theta\Rightarrow v^2=\frac{k}{m}x^2+2gx\sin\theta$$
$$v=\sqrt{\frac{170}{2}\times(0.2)^2+2\times9.8\times0.2\times\sin37°}=2.4\,m/s$$

(ب) دوباره از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. در اینجـا تغییـر ارتفاع برابر است با

$$h'=(D+x)\sin\theta=(1+0.2)\sin(37°)=0.72\,m$$
$$E_i=E_f$$
$$mgh'+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2$$
$$v^2=\frac{k}{m}x^2+2gh'\Rightarrow v=\sqrt{\frac{170}{2}(0.2)^2+2\times9.8(0.72)}$$
$$=4.18\,m/s$$

●●●۳۴- دو بچه در حال بازی‌اند و می‌خواهند با تیله‌هایی کـه از یک تفنگ فنری پر شده واقع بر یک میز شلیک می‌شـوند، جعبهٔ کوچکی را در کف اتاق هدف قرار دهند. جعبهٔ هـدف در فاصلهٔ افقی $D=2.20\,m$ از لبهٔ میز قـرار دارد؛ شـکل ۸-۴۸ را ببینید. یکی از آنها فنر را به اندازهٔ $1.10\,cm$ فشرده می‌کند، ولـی تیله $27.0\,cm$ در فاصلهٔ کوتاهتری نسبت به مرکز جعبه به زمین می‌افتد. نفر بعدی چقدر باید فنر را فشرده کند تا تیله درست به هدف بخورد؟ فرض کنید نه بر فنر و نه بر تیله هیچ اصطکاکی از طرف تفنگ وارد نمی‌شود.



شکل ۸-۴۸ مسئلهٔ ۳۴

حل: گلوله یک پرتابه است پس

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos\theta}$$

$\theta=0$ است پس

$$y=-\frac{gx^2}{2v_0^2}$$

برای گلولهٔ اول و دوم داریم

$$\frac{y_2}{y_1}=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\left(\frac{v_{01}}{v_{02}}\right)^2=1\Rightarrow\frac{v_{02}}{v_{01}}=\frac{x_2}{x_1}$$

برای بدست آوردن سرعت‌هـای v_{02} و v_{01} از قـانون پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}kd_1^2=\frac{1}{2}mv_{01}^2 \quad و \quad \frac{1}{2}kd_2^2=\frac{1}{2}mv_{02}^2$$
$$\Rightarrow\frac{v_{02}}{v_{01}}=\frac{d_2}{d_1}$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{d_2}{d_1}=\frac{x_2}{x_1}\Rightarrow d_2=\frac{x_2}{x_1}d_1$$
$$d_2=\frac{2.2}{2.2-0.27}1.1=1.25\,cm$$

●●●۳۵- ریسمان یکنواختی به طـول $25\,cm$ و جرم $15\,g$ در ابتدا به سقف چسبیده است. سپس در حالی که فقط یک سر آن به سقف چسبیده است، به طور قائم از سقف آویزان مـی‌شـود. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ریسمان بر اثر این تغییر سـمتگیری چقدر است؟ (*راهنمایی:* یک عنصر دیفرانسیلی از ریسمان را در نظر بگیرید و سپس از حسابان استفاده کنید.)

حل: مبدأ را سقف در نظر می‌گیریم. انرژی آن برابر است با

$$dU=-mg\,y\,dy$$

m جرم طول آویخته است

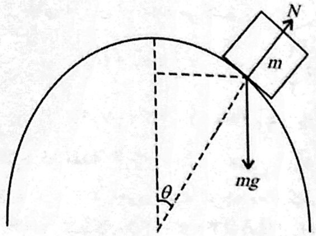
$$\Delta U=-\int\frac{M}{L}gydy=-\frac{Mg}{L}\int^{L}y\,dy=-\frac{Mg}{2L}L^2=-\frac{1}{2}MgL$$
$$\Delta v=-\frac{1}{2}\times15\times10^{-3}\times9.8\times0.25=-0.018\,J$$

●●●۳۶- پسر بچه‌ای در ابتدا بالای یـک تپـهٔ یخـی بـه شـکل نیمکره به شعاع $R=13.8\,m$ نشسته اسـت. او بـا تنـدی اولیـهٔ ناچیزی شروع به لغزیدن می‌کنـد (شـکل ۸-۴۹). یخ را بـدون اصطکاک فرض کنید. پسر بچـه در چـه ارتفـاعی از یـخ جـدا می‌شود؟

شکل ۸-۴۹ مسئلهٔ ۳۶

حل: نیروهای وارد بر بچه در راسـتای شـعاع را مـی‌نویـسیم N نیروی عمودی وارد از سطح است.

$$mg\cos\theta-N=m\frac{v^2}{R}$$



$$N=mg\cos\theta-m\frac{v^2}{R}$$

برای یافتن $m\frac{v^2}{R}$ از قانون بقای انرژی استفاده می‌کنیم.

$$E_i=E_f\Rightarrow mgR=\frac{1}{2}mv^2+mgR\cos\theta$$
$$\frac{1}{2}mv^2=mgR(1-\cos\theta)\Rightarrow\frac{mv^2}{R}=2mg(1-\cos\theta)$$

جایگذاری می‌کنیم

$$\Rightarrow N=mg\cos\theta-2mg(1-\cos\theta)$$
$$N=mg[3\cos\theta-2]$$

بچه در جایی جدا می‌شود که $N=0$ باشد. پس

$$3\cos\theta-2=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{2}{3}$$

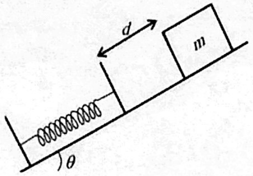
ارتفاع جدایی برابر است با

$$h=R\cos\theta=\frac{2}{3}(13.8)=9.2\,m$$

●●●۳۷- در شکل ۸-۴۵، قطعه‌ای به جرم $m=3.20\,kg$ روی سطح شیبدار بدون اصـطکاکی بـا زاویـهٔ شـیب $\theta=30.0°$ از حالت سکون شروع به لغزیدن می‌کند و پس از طـی مـسافت d به فنری با ثابت فنر $431\,N/m$ برخورد می‌کند. وقتی قطعـه بـه توقف لحظـه‌ای مـی‌رسـد، فنـر را بـه انـدازهٔ $21.0\,cm$ فـشرده می‌کند. (الف) مسافت d و (ب) فاصلهٔ میان اولین نقطهٔ تمـاس قطعه- فنر و نقطه‌ای که در آنجا قطعـه بیـشترین تنـدی را دارد چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم و مبدأ را جـایی می‌گیریم که فنر بیشترین فشردگی را دارد.

h ارتفاع است.



$$h=(x+d)\sin\theta=\frac{1}{2}(x+d)$$
$$E_i=E_f\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}kx^2\Rightarrow mg\frac{1}{2}(x+d)=\frac{1}{2}kx^2$$
$$d=\frac{k}{mg}x^2-x\Rightarrow d=\frac{431}{3.2\times9.8}(0.21)^2-0.21=0.40\,m$$

(ب) انرژی جنبشی را به صورت تابعی از طـول فـشردگی فنـر می‌نویسیم. از آن مشتق می‌گیریم و شرط بیـشینه بـودن را روی آن اعمال می‌کنیم.

$$E_i=E_f$$

E_i برابر با انرژی کل در لحظهٔ رسیدن قطعه به فنـر اسـت کـه برابر است با

$$E_i=mgh=mgd\sin\theta=\frac{1}{2}mgd=\frac{1}{2}\times3.2\times9.8\times0.4$$
$$=6.27\,J$$
$$E_f=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2-mgh'$$

در اینجا مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را طـول آزاد فنـر در نظـر می‌گیریم.

$$h'=x\sin\theta$$
$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2-mg\,x\sin\theta=6.27\,J$$
$$k=6.27+mgx\sin\theta-\frac{1}{2}kx^2$$
$$k=6.27+15.68x-215.5x^2$$

چون در نقطه‌ای که سرعت بیـشینه اسـت، انـرژی جنبـشی نیـز بیشینه است پس

$$\frac{dk}{dx}=0\Rightarrow15.68-431x=0$$
$$x=\frac{15.68}{431}=0.036\,m$$

●●۳۸- انرژی پتانسیل یک مولکول دو اتمی (یـک دسـتگاه دو اتمی مثل H_2 یا O_2) با رابطهٔ زیر داده می‌شود.

$$U=\frac{A}{r^{12}}-\frac{B}{r^6}$$

که در آن r فاصلهٔ میان دو اتم در مولکلول، و A و B مقدارهایی ثابت و مثبت‌اند. این انرژی پتانسیل با نیرویی کـه دو اتـم را بـه یکدیگر پیوند مـی‌دهـد، وابـسته اسـت. (الف) *فاصـلهٔ جـدایی تعادل*- یعنی، فاصله‌ای میان دو اتم را که در آن نیروی وارد بـر هر اتم صفر است- بیابید. اگر فاصـلهٔ میـان آنهـا (ب) کمتـر و (پ) بیشتر از فاصلهٔ جدایی تعادل باشد، آیا نیرو رانـشی اسـت

(اتمها از هم دور می‌شوند) یا ربایشی (اتمها به هم نزدیک می‌شوند)؟

حل: (الف) باید $\frac{dU}{dr}$ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\frac{du}{dr}=-\frac{۱۲A}{r^{۱۳}}+\frac{۶B}{r^{۷}}=۰$$

$$\frac{۲A}{r^{۶}}=B\Rightarrow r^{۶}=\left(\frac{۲A}{B}\right)\Rightarrow r_۰=\left(\frac{۲A}{B}\right)^{۱/۶}$$

(ب) باید بررسی کنیم که آیا این نقطه، نقطهٔ تعادل پایدار است یا ناپایدار، باید عبارت $\frac{d^۲U}{dr^۲}$ را در $r_۰$ بررسی کنیم.

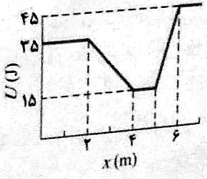
$$\frac{d^۲U}{dr^۲}=۱۵۶\frac{A}{r^{۱۴}}-\frac{۴۲B}{r^{۸}}$$

$$\left.\frac{d^۲U}{dr^۲}\right|_{r_۰}=۱۵۶\frac{A}{\left(\frac{۲A}{B}\right)^{۱۴/۶}}-\frac{۴۲B}{\left(\frac{۲A}{B}\right)^{۸/۶}}$$

$$\left.\frac{d^۲U}{dr^۲}\right|_{r_۰}=\frac{۱۵۶}{۲^{۷/۳}}\frac{AB^{۷/۳}}{A^{۷/۳}}-\frac{۴۲}{۲^{۴/۳}}\frac{B^{۷/۳}}{A^{۴/۳}}=\frac{۷۲}{۲^{۷/۳}}\frac{B^{۷/۳}}{A^{۴/۳}}>۰$$

چون این عبارت از صفر بزرگتر، این نقطه، نقطهٔ تعادل پایدار است. در فاصلهٔ بیشتر از $r_۰$، نیرو جاذبه و کمتر از $r_۰$، نیرو دافعه است.

●●۳۹- شکل ۸-۵۰ نمودار انرژی پتانسیل U را برحسب مکان x ذره‌ای به جرم ۰/۹۰kg نشان می‌دهد که می‌تواند فقط در امتداد محور x حرکت کند (نیروهای ناپایستار وارد نشده‌اند). سه مقدار عبارت‌اند از $U_A=۱۵/۰\,J$، $U_B=۳۵/۰\,J$ و $U_C=۴۵/۰\,J$. ذره در $x=۴/۵m$ با تندی اولیهٔ ۷/۰m/s در جهت منفی x رها می‌شود. (الف) اگر ذره بتواند به $x=۱/۰m$ برسد، تندی در آنجا چقدر است؟ و اگر نتواند برسد، نقطهٔ برگشت آن چیست؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت نیروی وارد بر ذره در لحظه‌ای که شروع به حرکت به طرف چپ $x=۴/۰m$ می‌کند چیست؟ فرض کنید، به جای این، ذره در $x=۴/۵m$ با تندی ۷/۰m/s در جهت مثبت x رها شود. (ت) اگر ذره بتواند به $x=۷/۰m$ برسد، تندی در آنجا چقدر است؟ و اگر نتواند برسد، نقطهٔ برگشت آن چیست؟ (ث) بزرگی و (ج) جهت نیروی وارد بر ذره در لحظه‌ای که شروع به حرکت به طرف راست $x=۵/۰m$ می‌کند، چیست؟



شکل ۸-۵۰ مسئلهٔ ۳۹

حل: (الف)

$$E_i=E_f$$

$$E_i=\frac{۱}{۲}mv^۲+u(x)=\frac{۱}{۲}\times ۰/۹\times ۴۹+۱۵=۳۷/۰۵J$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲+U(x)=۳۷/۰۵$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲+۳۵=۳۷/۰۵\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۰/۹v^۲=۲/۰۵$$

$$v^۲=۴/۵۶\Rightarrow v=۲/۱۴\,m/s$$

(ب) و (پ) در فاصلهٔ بین $x=۲$ تا $x=۴$ انرژی پتانسیل به شکل زیر است

$$U(x)=-۱۰x+۵۵$$

$$F(x)=-\frac{dU(x)}{dx}=۱۰N$$

اندازهٔ این نیرو ۱۰N و جهت آن رو به مثبت محور x هاست.

(ت) دوباره از بقای انرژی استفاده می‌کنیم.

$$E_i=E_f\Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_i^۲+U_i=\frac{۱}{۲}mv_f^۲+U_f$$

$$\frac{۱}{۲}mv_f^۲=\frac{۱}{۲}\times ۰/۹\times ۴۹+۱۵-۴۵=-۷/۹۵$$

ملاحظه می‌شود که مقدار انرژی جنبشی منفی شد که غیرممکن است. پس ذره به $x=۷$ نمی‌رود. با توجه به اینکه پتانسیل بین $x=۵$ تا $x=۶$ شکل $U(x)=۳۰x-۱۳۵$ را دارد، نقطهٔ برگشت را می‌یابیم (انرژی جنبشی در آنجا صفر است)

$$E_i=E_f\Rightarrow ۳۷/۰۵=۳۰x-۱۳۵$$

نقطهٔ برگشت

$$۳۰x=۱۷۲/۰۵\Rightarrow x=۵/۷۴m$$

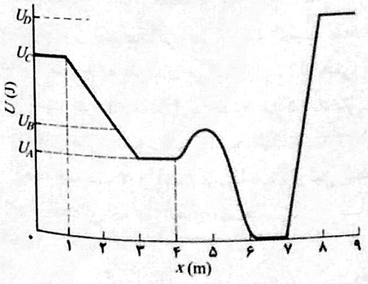
(ث) و (ج)

$$U(x)=۳۰x-۱۳۵\qquad ۵<x<۶$$

$$F(x)=\frac{-dU(x)}{dx}=-۳۰N$$

اندازهٔ نیرو ۳۰N و به سمت چپ است.

●●۴۰- شکل ۸-۵۱ نمودار انرژی پتانسیل U را برحسب x برای ذره‌ای به جرم ۰/۲۰۰kg نشان می‌دهد که بر اثر یک نیروی پایستار فقط می‌تواند در راستای محور x حرکت کند. نمودار دارای مقدارهای $U_A=۹/۰۰J$، $U_C=۲۰/۰۰J$ و $U_D=۲۴/۰۰J$ است. ذره از نقطه‌ای رها می‌شود که در آنجا U «قلهٔ پتانسیل» با «بلندی» $U_B=۱۲/۰۰J$ با انرژی جنبشی ۴/۰۰J را تشکیل می‌دهد. تندی ذره در (الف) $x=۳/۵m$ و (ب) $x=۶/۵m$ چقدر است؟ مکان نقطهٔ برگشت در (پ) سمت راست و (ت) در سمت چپ در کجا واقع است؟



شکل ۸-۵۱ مسئلهٔ ۴۰

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم

$$E_i=E_f$$

$$\frac{۱}{۲}mv_i^۲+U_i=\frac{۱}{۲}mv_f^۲+U_f\Rightarrow ۴+۱۲=\frac{۱}{۲}\times ۰/۲v^۲+۹$$

$$۰/۱v^۲=۷\Rightarrow v^۲=۷۰\Rightarrow v=۸/۳۷\,m/s$$

(ب) مانند (الف)

$$\frac{۱}{۲}mv_i^۲+U_i=\frac{۱}{۲}mv_f^۲+U_f\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۰/۲\times v_f^۲=۴+۱۲$$

$$v_f^۲=۱۶۰\Rightarrow v_f=۱۲/۶۵\,m/s$$

(پ) ابتدا باید معادلهٔ انرژی پتانسیل برای $۷<x<۸$ را بیابیم

$$U(x)=۲۴x-۱۶۸$$

$$E_i=E_f\Rightarrow ۴+۱۲=۲۴x-۱۶۸\Rightarrow ۲۴x=۱۸۴$$

$$x=۷/۶۷m$$

(ت) باید شکل پتانسیل برای $۱<x<۳$ را بدانیم

$$U(x)=-۵/۵x+۲۵/۵$$

$$E_i=E_f$$

$$۴+۱۲=-۵/۵x+۲۵/۵\Rightarrow ۵/۵x=۹/۵$$

$$x=۱/۷۳m$$

●●●۴۱- نیروی پایستار $F(x)$ روی ذره‌ای به جرم ۱/۰kg که در امتداد محور x حرکت می‌کند، وارد می‌شود. انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به $F(x)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

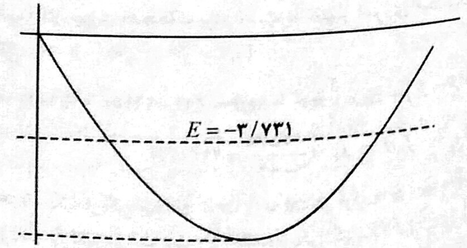
$$U(x)=-۴xe^{-x/۴}J$$

که در آن x برحسب متر است. در $x=۵/۰m$، انرژی جنبشی ذره ۲/۰J است. (الف) انرژی مکانیکی دستگاه چقدر است؟ (ب) نمودار $U(x)$ را به صورت تابعی از x در بازهٔ $۰\le x\le ۱۰m$ رسم کنید و روی آن خطی را که نمایانگر انرژی مکانیکی دستگاه است بکشید. با استفاده از قسمت (ب) مقدار(پ) کمینهٔ x و (ت) بیشینهٔ x را که ذره بین آن دو می‌تواند حرکت کند به دست آورید. (ث) با استفاده از قسمت (ب) انرژی جنبشی بیشینهٔ ذره را به دست آورید و (ج) در آن لحظه مقدار x را تعیین کنید. (چ) معادلهٔ مربوط به تابع $F(x)$ برحسب x را بنویسید. (ح) به ازای چه مقداری (متناهی) از x، $F(x)=۰$ است؟

حل: (الف)

$$E=K+U=۲+U(۵)=۲+-۴\times ۵e^{-۵/۴}=-۳/۷۳۱J$$

(ب)



(پ) و (ت) برای یافتن نقاط برگشت، انرژی پتانسیل را با انرژی کل برابر قرار می‌دهیم:

$$-۳/۷۳۱=-۴xe^{-x/۴}$$

$$x=۱/۲۹m$$

$$x=۹/۱۲$$

ذره‌بین این دو نقطه می‌تواند حرکت کند.

(ث) و (ج) وقتی ذره در $x=۴$ قرار دارد، انرژی پتانسیل آن کمینه است، چون $\left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_۴=۰$ است. طبق اصل بقای انرژی داریم.

$$E=U(۴)+K\Rightarrow K=E-U$$

$$K_{max}+E-U_{max}\Rightarrow K_{max}=-۳/۷۳۱+۵/۸۹=۲/۱۶J$$

(چ)

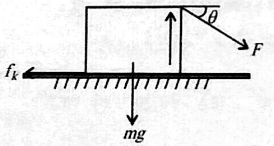
$$F(x)=\frac{-dU(x)}{dx}=۴\left(۱-\frac{x}{۴}\right)e^{-x/۴}$$

(ح)

$$F(x)=۰\Rightarrow x=۴$$

●۴۲- کارگری قطعه‌ای به جرم ۲۷kg را با نیرویی که در راستای ۳۲° زیر افق قرار دارد با تندی ثابت به اندازهٔ ۹/۲m روی سطحی هل می‌دهد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و سطح ۰/۲۰ باشد، (الف) کار انجام شده توسط نیروی کارگر و (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه قطعه- سطح چقدر است؟

حل: (الف) چون تندی قطعه ثابت است نیروی کارگر با نیروی اصطکاک برابر است.



$$F_x=F\cos\theta\qquad F_y=F\sin\theta$$

$$N-mg-F\sin\theta=۰\Rightarrow N=mg+F\sin\theta$$

$$f_k=\mu_kN=\mu_k(mg+F\sin\theta)$$

$$F_x=f_k\Rightarrow F\cos\theta=\mu_kmg+\mu_kF\sin\theta$$

$$\Rightarrow F(\cos\theta-\mu_k\sin\theta)=\mu_kmg$$

$$F=\frac{\mu_kmg}{\cos\theta-\mu_k\sin\theta}=\frac{۰/۲\times ۲۷\times ۹/۸}{۰/۸۴-۰/۲\times ۰/۵۳}=۷۱/۱۳N$$

کاری که کارگر انجام داده برابر است با:

$$w=\vec{F}\cdot\vec{d}=Fd\cos\theta=۷۱/۱۳N\times ۹/۲\times\cos ۳۲°=۵۵۶/۲J$$

(ب) کاری که نیروی اصطکاک انجام می‌دهد، تماماً به گرما تبدیل می‌شود. کار نیروی اصطکاک برابر است با $-۵۵۶/۲J$.

●۴۳- یک سگ گله لانه‌اش را با وارد آوردن نیروی افقی ۸/۰N روی کفی می‌کشد. بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر لانه برابر ۵/۰N است. وقتی لانه به اندازهٔ ۰/۷۰m روی زمین کشیده شود (الف) کار انجام شده توسط نیروی وارد شده از طرف سگ و (ب) افزایش انرژی گرمایی لانه و سطح زمین چقدر است؟

حل: (الف)

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=Fd\cos(0)=8\times0.7=5.6J$$

(ب) افزایش گرما ناشی از کار نیروی اصطکاک است.

$$W_{f_k}=\vec{f}_k\cdot\vec{d}=f_kd\cos(180^\circ)=-5\times0.7=-3.5J$$

افزایش انرژی گرمایی برابر است با ۳/۵J.

۴۴●●- یک نیروی افقی به بزرگی ۳۵/۰N، قطعه‌ای به جرم ۴/۰۰kg را روی کفی هل می‌دهد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و کف ۰/۶۰۰ باشد، (الف) وقتی قطعه روی کف به اندازهٔ ۳/۰۰m جابه‌جا می‌شود، نیروی وارد شده چقدر کار روی دستگاه قطعه- کف انجام داده است؟ (ب) در طی این جابه‌جایی، انرژی گرمایی قطعه به اندازهٔ ۴۰/۰J افزایش می‌یابد. انرژی گرمایی کف چقدر افزایش یافته است؟ (پ) افزایش انرژی جنبشی قطعه چقدر است؟

حل: (الف)

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=Fd\cos(0)=35\times3=105J$$

(ب) چون افزایش انرژی گرمایی ناشی از کار نیروی اصطکاک است، کار نیروی اصطکاک را محاسبه می‌کنیم.

$$W_{f_k}=\vec{f}_k\cdot\vec{d}=f_kd\cos(180^\circ)=-f_kd$$
$$=-0.6\times4\times9.8\times3=-70.56J$$

یعنی ۷۰/۵۶J انرژی، به انرژی گرمایی سطح و قطعه تبدیل شده است.

Q_1: انرژی گرمایی سطح $\quad$ Q_2: انرژی گرمایی قطعه

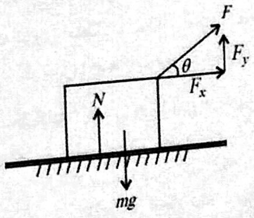
$$Q_1+Q_2=70.56\Rightarrow Q_2=70.56-Q_1$$
$$Q_2=70.56-40=30.56J$$

(پ) طبق قضیه کار- انرژی جنبشی

$$\Delta K=W+W_f=105-70.56=34.44J$$

۴۵●●- از طناب برای کشیدن قطعه‌ای به جرم ۳/۵۷kg روی یک کف افقی استفاده شده است. طناب نیرویی به بزرگی ۷/۶۸N را در جهت ۱۵/۰° بالای افق به قطعه وارد می‌آورد و آن را با تندی ثابت به اندازهٔ ۴/۰۶m جابه‌جا می‌کند. مطلوب است (الف) کار انجام شده توسط نیروی طناب، (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه قطعه- کف، (پ) ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و کف. **SSM**

حل: (الف) چون تندی ثابت است، نیروی اصطکاک برابر است با $F\cos\theta$.



$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=Fd\cos\theta=7.68\times4.06\cos(15^\circ)$$
$$W=30.1J$$

(ب) این افزایش انرژی گرمایی برابر است با کار نیروی اصطکاک. از طرفی چون تغییر انرژی جنبشی صفر است پس:

$$\Delta K=W+W_{f_k}=0\Rightarrow W_{f_k}=-W=-30.1J$$
$$Q=30.1J$$

(پ)

$$F\cos\theta=f_k=\mu_kN$$
$$N=mg-F\sin\theta$$
$$\Rightarrow F\cos\theta=\mu_k(mg-F\sin\theta)\Rightarrow\mu_k=\frac{F\cos\theta}{mg-F\sin\theta}$$
$$\mu_k=\frac{7.68\cos(15^\circ)}{3.57\times9.8-7.68\sin(15^\circ)}=0.225$$

۴۶●- اسکی‌بازی به جرم ۶۰kg انتهای مسیر پرش را با سرعت ۲۴ m/s در جهت ۲۵° بالای افق ترک می‌کند. فرض کنید تحت تأثیر کشش هوا، اسکی باز با تندی ۲۲ m/s به سطح زمین که به طور قائم ۱۴m زیر انتهای مسیر پرش قرار دارد، باز گردد. از لحظهٔ جدا شدن از انتهای مسیر پرش تا بازگشت به سطح زمین، انرژی مکانیکی دستگاه اسکی باز- زمین تحت تأثیر کشش هوا به چه میزانی کاهش یافته است؟

حل: میزان کاهش یافتن برابر است با تغییر انرژی مکانیکی کل

$$E_i=K_i+U_i=\frac{1}{2}mv^2+mgh=\frac{1}{2}\times60\times(24)^2+60\times9.8\times14$$
$$=25512J$$
$$E_f=K_f+U_f=\frac{1}{2}mv^2+0=\frac{1}{2}\times60\times(22)^2=14520J$$
$$W=E_f-E_i=14520-22512=-10992J$$

۴۷●- خرسی به جرم ۲۵kg از حالت سکون به اندازهٔ ۱۲m بر درخت کاجی رو به پایین سر می‌خورد و تندی آن درست پیش از برخورد با سطح زمین، ۵/۶m/s است. (الف) در حین سُر خوردن خرس، تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه خرس- زمین چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی خرس درست پیش از برخورد با سطح زمین چقدر است؟ (پ) نیروی اصطکاک متوسطی که در حین سُر خوردن بر خرس وارد می‌شود چقدر است؟ **SSM ILW**

حل: (الف)

$$\Delta U=mgh_f-mgh_i=mg(0-12)$$
$$=-25\times9.8\times12=-2940J$$

(ب)

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times25\times(5.6)^2=392J$$

(پ) کار نیروی اصطکاک برابر است با تغییر انرژی مکانیکی کل:

$$W_{f_k}=E_f-E_i=\frac{1}{2}mv^2-mgh=392-2940=-2548J$$
$$W_{f_k}=-f_kd\Rightarrow f_k=\frac{-2548}{-12}=212.3N$$

۴۸●- یک بازیکن بیسبال، توپ را با تندی اولیهٔ ۸۱/۸mi/h پرتاب می‌کند. درست پیش از آنکه بازیکن گیرنده توپ را در همان ارتفاع بگیرد، تندی توپ ۱۱۰ft/s است. انرژی مکانیکی دستگاه توپ- زمین برحسب فوت- پاوند، بر اثر کشش هوا چقدر کاهش یافته است؟ (وزن یک توپ بیسبال ۹/۰۰oz است.)

حل:

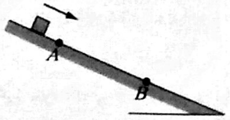
$$E_f-E_i=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}m(v_f^2-v_i^2)$$
$$\Delta E=\frac{1}{2}\times0.0176slug\times((110)^2-(120)^2)=-20.2ft\cdot lb$$

۴۹●- یک بشقاب پلاستیکی (فریزبی)[1] به جرم ۷۵g از نقطه‌ای که ۱/۱m بالای سطح زمین است با تندی ۱۲m/s پرتاب می‌شود. وقتی بشقاب به ارتفاع ۲/۱m می‌رسد، تندی آن برابر ۱۰/۵m/s است. کاهش E_{mec} دستگاه بشقاب- زمین بر اثر کشش هوا چقدر است؟

حل:

$$E_i=\frac{1}{2}mv_i^2+mgh=\frac{1}{2}\times75\times10^{-3}\times(12)^2$$
$$+0.075\times9.8\times1.1=6.2J$$
$$E_f=\frac{1}{2}mv_f^2+mgh=\frac{1}{2}\times0.075\times(10.5)^2$$
$$+0.075\times9.8\times2.1=5.7J$$
$$\Delta E=E_f-E_i=5.7-6.2=-0.5J$$

۵۰●- در شکل ۸-۵۲، قطعه‌ای روی سطح شیب‌داری رو به پایین می‌لغزد. هنگامی که قطعه از نقطهٔ A به نقطهٔ B که به فاصلهٔ ۵/۰m از آن قرار دارد حرکت کند، نیروی $\vec{F}$ به بزرگی ۲/۰N که جهت آن رو به پایین شیب است بر قطعه وارد می‌شود. بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر قطعه ۱۰N است. اگر انرژی جنبشی قطعه در فاصلهٔ میان A تا B به اندازهٔ ۳۵J افزایش یابد، در حین حرکت قطعه از A به B نیروی گرانشی چقدر کار روی قطعه انجام می‌دهد؟



شکل ۸-۵۲ مسئله‌های ۵۰ و ۶۹

حل:

$$\Delta K=35 \qquad \Delta K=W_F+W_{fk}+W_g$$
$$W_F=\vec{F}\cdot\vec{d}=2\times5=10J$$
$$W_{f_k}=\vec{f}_k\cdot\vec{d}=-10\times5=-50J$$
$$35=10-50+W_g\Rightarrow W_g=75J$$

۵۱●- بر اثر ریزش کوه، تخته سنگی به جرم ۵۲۰kg از دامنهٔ کوهی به طول ۵۰۰m و ارتفاع ۳۰۰m، از حالت سکون به پایین می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان تخته سنگ و سطح کوه برابر ۰/۲۵ است. (الف) اگر انرژی پتانسیل گرانشی U دستگاه تخته سنگ- زمین در پایین کوه برابر صفر باشد،

1. Frisbee

مقدار U درست پیش از لغزیدن تخته سنگ چقدر است؟ (ب) در حین لغزیدن تخته سنگ، چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ (پ) انرژی جنبشی تخته سنگ در لحظهٔ رسیدن به پایین کوه چقدر است؟ (ت) در آن موقع تندی تخته سنگ چقدر است؟

حل: (الف)

$$U=mgh=520\times9.8\times300=1528800J$$

(ب)

$$\sin\theta=\frac{h}{L}=\frac{300}{500}=0.6$$

این انرژی برابر است با کار نیروی اصطکاک

$$W_{f_k}=\vec{f}_k\cdot\vec{d}=-\mu_kNd=-\mu_kmg\cos\theta d$$
$$W_{f_k}=-0.25\times520\times9.8\times(0.8)\times500=-509600J$$

(پ) به دلیل وجود اصطکاک داریم:

$$W_{f_k}=E_f-E_i\Rightarrow E_f=W_{f_k}-E_i$$
$$K=-50900J+1528800J=1019200J$$

(ت)

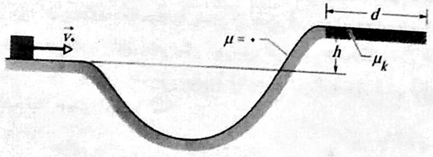
$$\frac{1}{2}\times520(v^2)=1019200\Rightarrow v=62.6m/s$$

۵۲●●- قطعه‌ای به جرم ۲/۰kg را به یک فنر افقی مقابل آن فشار می‌دهیم و فنر به اندازهٔ ۱۵cm فشرده می‌شود. پس از آنکه قطعه رها شود، فنر آن را روی میز می‌لغزاند. قطعه پس از طی مسافت ۷۵cm از جایی که رها شده است، متوقف می‌شود. ثابت فنر برابر ۲۰۰N/m است. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و میز چقدر است؟

حل: به دلیل وجود اصطکاک، تمام انرژی اولیه، به کار نیروی اصطکاک تبدیل می‌شود.

$$E_i=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}\times200(0.15)^2=2.25J$$
$$W_{f_k}=-f_kd=-\mu_kmgd=-\mu_k\times2\times9.8\times0.75$$
$$=-14.7\mu_k$$
$$|E_i|=|W_{fh}|\Rightarrow\mu_k=\frac{2.25}{14.7}=0.153$$

۵۳●●- در شکل ۸-۵۳، قطعه‌ای با عبور از یک درهٔ میانی، از یک سطح به سطحی بالاتر می‌لغزد. مسیر تا رسیدن قطعه به سطح بالاتر بدون اصطکاک است. در آنجا نیروی اصطکاک قطعه را پس از طی مسافت d متوقف می‌کند. تندی اولیهٔ v_0 قطعه برابر ۶/۰ m/s، اختلاف بلندی h دو سطح برابر ۱/۱m و μ_k برابر ۰/۶۰ است. d را به دست آورید. GO



شکل ۸-۵۳ مسئلهٔ ۵۳

حل: با استفاده از بقای انرژی، انرژی جنبشی ذره را در ارتفاع h می‌یابیم.

$$E_i=E_f$$

$\frac{1}{2}mv_0^2 = K + mgh$

$K = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = m\left(\frac{36}{2} - 10/78\right) = 7/22\,J$

از طرفی روی سطح افقی اصطکاک، تمام این انرژی جنبشی به کار نیروی اصطکاک تبدیل می‌شود.

$W_{f_k} = -f_k d \Rightarrow \mu_k mgd = K$

$\Rightarrow d = \frac{K}{\mu_k mg} = \frac{7/22}{0/6\times 9/8} = 1/23\,m$

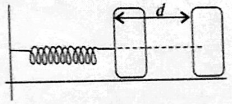
●●۵۴- یک کلوچهٔ بزرگ که روی سطحی افقی می‌لغزد، به یک سر فنری افقی با ثابت فنر $k = 400\,N/m$ متصل شده است؛ سر دیگر فنر در جایی ثابت شده است. هنگامی که کلوچه از مکان تعادل فنر می‌گذرد، دارای انرژی جنبشی ۲۰/۰J است. با لغزیدن کلوچه، نیروی اصطکاکی به بزرگی ۱۰/۰N بر آن وارد می‌شود. (الف) کلوچه از مکان تعادل تا پیش از رسیدن به سکون لحظه‌ای چقدر می‌لغزد؟ (ب) انرژی جنبشی کلوچه هنگامی که رو به عقب از مکان تعادل فنر می‌گذرد چقدر است؟

حل: (الف) به دلیل وجود اصطکاک داریم:

$E_f - E_i = -f_k d \qquad E_f = \frac{1}{2}kd^2 \qquad E_i = 20\,J$

$\frac{1}{2}kd^2 - 20 = -10d \Rightarrow 200d^2 + 10d - 20 = 0$

$20d^2 + d - 2 = 0 \Rightarrow d = 0/29\,m$

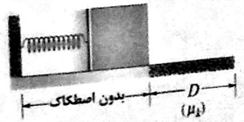


(ب) در این حالت طبق اصل کار- انرژی جنبشی داریم:

$\Delta K = W_f + W_s$

$K = -fd + \frac{1}{2}kd^2 = -10\times 0/29 + 200\times(0/29)^2 = 14/22\,J$

●●●۵۵- شکل ۸-۵۴، قطعه‌ای به جرم ۳/۵kg را نشان می‌دهد که توسط فنری فشرده شده با ثابت فنر ۶۴۰N/m از حالت سکون شتاب گرفته است. قطعه هنگامی که فنر به طول واهلیده‌اش می‌رسد از فنر جدا می‌شود و سپس روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = 0/25$ حرکت می‌کند. نیروی اصطکاک، قطعه را پس از طی مسافت $D = 7/8\,m$ متوقف می‌کند. (الف) افزایش انرژی گرمایی دستگاه قطعه- سطح، (ب) انرژی جنبشی بیشینهٔ قطعه، و (پ) طول فشردگی اولیهٔ فنر چقدر است؟ GO



شکل ۸-۵۴ مسئلهٔ ۵۵

حل: (الف) کل انرژی ذخیره شده در فنر به کار نیروی اصطکاک تبدیل می‌شود.

$W_{f_k} = -f_k d = -\mu_k mgd$

$W_{f_k} = -0/25\times 3/5\times 9/8\times 7/8 = -66/89\,J$

این انرژی به صورت گرما ظاهر می‌شود.

(ب) انرژی جنبشی بیشینه، برابر با همان انرژی ذخیره شده در فنر است که کاملاً به گرما تبدیل می‌شود یعنی همان ۶۶/۸۹J.

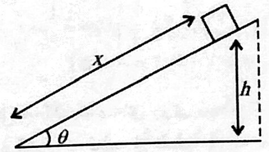
(پ) از این واقعیت استفاده می‌کنیم که تمام انرژی ذخیره شده در فنر به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود.

$\frac{1}{2}kd^2 = 66/89$

$d^2 = \frac{133/78}{640} \Rightarrow d = 0/46\,m$

●●۵۶- بسته‌ای به جرم ۴/۰kg با انرژی جنبشی ۱۲۸J شروع به بالا رفتن از شیبی با زاویهٔ ۳۰° می‌کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین بسته و سطح شیبدار برابر ۰/۳۰ باشد، بسته چقدر روی شیب بالا خواهد رفت؟

حل:



$W_{f_k} = E_f - E_i$

$\sin\theta = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\sin\theta$

$E_i = 128\,J$

$E_f = mgh = mgx\sin\theta = \frac{1}{2}\times 4\times 9/8x = 19/6x$

$W_{fk} = -f_k d = -\mu_k mg\cos\theta\, x = -10/1x$

$19/6x - 128 = -10/1x \Rightarrow 128 = 29/7x$

$x = 4/3\,m$

●●۵۷- وقتی نوعی سوسک به نام سوسک *صدادار*[1] به پشت وارونه شود، قوسی به کمر خود می‌دهد و ناگهان رو به بالا می‌جهد و به این ترتیب انرژی ذخیره شده در عضله را به انرژی مکانیکی تبدیل می‌کند. این ساز و کار پرتابی صدای تیز قابل شنیدنی را ایجاد می‌کند که نام این سوسک از همان گرفته شده است. نوار ویدئویی از پرش یک سوسک مشخص نشان می‌دهد که سوسکی به جرم $m = 4/0\times10^{-6}\,kg$ در حین پرتاب، نخست به اندازهٔ ۰/۷۷mm مستقیماً رو به بالا می‌رود و سپس تا ارتفاع بیشینهٔ $h = 0/30\,m$ رو به بالا می‌جهد. در حین پرتاب، بزرگی متوسط (الف) نیروی خارجی وارد به پشت سوسک از طرف کف و (ب) شتاب سوسک برحسب g چقدر است؟

1. click beetle

حل: (الف) کار نیروی متوسط را برابر با کار نیروی وزن تا بالا رفتن در نظر می‌گیریم. (طبق پایستگی انرژی)

$\bar{F}d = mgh \Rightarrow \bar{F} = \frac{mgh}{d}$

$\bar{F} = \frac{4\times10^{-6}\times 9/8\times 0/3}{(0/77\times10^{-3})} = 1/53\times10^{-2}\,N$

(ب)

$\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{\bar{F}}{m} = \frac{(1/53\times10^{-2})}{4\times10^{-6}} = 3825\,m/s^2$

$\bar{a} = 390g$

●●۵۸- بچه‌ای که وزن او ۲۶۷N است از سرسره‌ای به طول ۶/۱m که با افق زاویهٔ ۲۰° می‌سازد، رو به پایین سر می‌خورد. ضریب اصطکاک جنبشی بین سرسره و بچه ۰/۱۰ است. (الف) چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ (ب) اگر او از بالای سرسره با تندی ۰/۴۵۷m/s شروع به لغزیدن کند، تندی او در پایین سرسره چقدر است؟

حل: (الف) این انرژی گرمایی برابر است با کار نیروی اصطکاک.

$W_{f_k} = -f_k d = -\mu_k mg\cos\theta d$

$|Q| = 0/1\times267\times\cos(20°)(6/1) = 153\,J$

(ب)

$W_{f_k} = E_f - E_i \qquad h = x\sin\theta$

$E_i = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = mg\left(\frac{v^2}{2g} + h\right)$

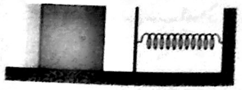
$E_i = 267(0/1 + 6/1\sin(20°)) = 583/7\,J$

$E_f = \frac{1}{2}mv^2$

$-153 = \frac{1}{2}mv^2 - 583/7$

$\Rightarrow v = 5/62\,m/s$

●●۵۹- در شکل ۸-۵۵، قطعه‌ای به جرم $m = 2/5\,kg$ به طرف فنری با ثابت فنر $k = 320\,N/m$ می‌لغزد. وقتی قطعه متوقف شود، فنر را به اندازهٔ ۷/۵cm فشرده می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و سطح ۰/۲۵ است. در حین تماس قطعه با فنر تا هنگام توقف (الف) کار انجام توسط نیروی فنر و (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه قطعه- سطح چقدر است؟ (پ) تندی قطعه درست در لحظه‌ای که به فنر می‌رسد چقدر است؟ ILW



شکل ۸-۵۵ مسئلهٔ ۵۹

حل: (الف)

$W_s = -\frac{1}{2}kx^2$

$W_s = -\frac{1}{2}\times320\times(0/075)^2 = -0/9\,J$

(ب) این افزایش انرژی برابر است با کار نیروی اصطکاک.

$Q = f_k d = \mu_k mgd = 0/25\times2/5\times9/8\times0/075 = 0/46\,J$

(پ)

$W_{f_k} = E_f - E_i \qquad E_i = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_f = \frac{1}{2}kx^2$

$-0/46 = 0/9 - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 1/36$

$v^2 = \frac{2/72}{2/5} \Rightarrow v = 1/043\,m/s$

●●۶۰- یک ظرف کیک روی شیبی با زاویهٔ ۴۰° رو به بالا حرکت داده می‌شود. در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۵۵cm از پایین سطح شیبدار (که در امتداد شیب اندازه‌گیری شده است)، تندی ظرف برابر ۱/۴m/s است. ضریب اصطکاک جنبشی بین ظرف و سطح شیبدار ۰/۱۵ است. (الف) ظرف تا چه مسافت بیشتری روی سطح شیبدار رو به بالا حرکت می‌کند؟ (ب) ظرف موقع برگشتن به پایین به چه سرعتی به پایین سطح می‌رسد؟ (پ) اگر ضریب اصطکاک جنبشی را کاهش دهیم (ولی تندی و مکان داده شده را تغییر ندهیم) آیا پاسخهای (الف) و (ب) افزایش می‌یابند یا کاهش یا بدون تغییر می‌مانند؟

حل: (الف) به دلیل وجود اصطکاک داریم:

$W_{f_k} = E_f - E_i \qquad E_i = \frac{1}{2}mv^2 = 0/98m$

$E_f = mgh = mgx\sin\theta$

$\Rightarrow -\mu_k mgx\cos\theta = mgx\sin\theta - 0/98m$

$x(g\sin\theta + \mu_k g\cos\theta) = 0/98$

$x = \frac{0/98}{9/8(\sin40 + 0/15\cos40)} = 0/132\,m$

(ب)

$W_{fk} = E_f - E_i \qquad E_i = mgh = mgd\sin\theta$

$d = (0/55 + 0/132)m = 0/682\,m$

$E_f = \frac{1}{2}mv^2 \qquad W_{f_k} = -\mu_k mgd\cos\theta$

جایگذاری می‌کنیم

$\Rightarrow -\mu_k mgd\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 - mgd\sin\theta$

$\frac{1}{2}mv^2 = mgd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$

$\Rightarrow v^2 = 2gd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$

$v = \sqrt{2\times9/8\times0/682(\sin40 - 0/15\cos40°)} = 2/66\,m/s$

(پ) هر چه اتلاف انرژی کمتر باشد، جسم تا مسافت بیشتری بالا می‌رود و هنگام بازگشت سرعت آن بیشتر است.

●●۶۱- سنگی به وزن ۵/۲۹N به طور قائم با تندی اولیهٔ ۲۰/۰m/s از سطح زمین پرتاب شده است. نیروی کششی هوای وارد بر سنگ در حین پرواز برابر ۰/۲۶۵N است. (الف) ارتفاع بیشینه‌ای که سنگ به آن می‌رسد و (ب) تندی آن درست پیش برخورد با زمین چقدر است؟

حل: (الف)

$$W_{fk} = E_f - E_i \Rightarrow -۰/۲۶۵h = mgh - \frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = (mg + ۰/۲۶۵)h \Rightarrow h = \frac{۰/۵ \times \frac{۵/۲۹}{۹/۸}(۴۰۰)}{(۵/۲۹ + ۰/۲۶۵)}$$

$$h = ۱۹/۵\text{m}$$

(ب)

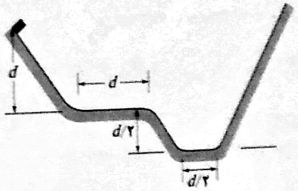
$$W_{f_k} = E_f - E_i \Rightarrow -۰/۲۶۵h = \frac{۱}{۲}mv^۲ - mgh$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = h(mg - ۰/۲۶۵) \Rightarrow v^۲ = \frac{۹/۸}{۵/۲۹} \times ۲ \times ۱۹/۵ \times ۵/۰۲۵$$

$$= ۳۶۴/۸۱$$

$$v = ۱۹/۱\text{m/s}$$

۶۲●●●- در شکل ۸-۵۶ قطعه‌ای که در ارتفاع $d = ۴۰\text{cm}$ از حالت سکون رها شده است، پس از آنکه بر شیب بدون اصطکاکی رو به پایین می‌لغزد، وارد اولین بخش مسطح می‌شود که طول آن d و ضریب اصطکاک جنبشی آن ۰/۵۰ است. اگر قطعه باز هم به حرکت خود ادامه دهد، آنگاه بر شیب بدون اصطکاک دومی به بلندی $d/۲$ رو به پایین می‌لغزد و سپس وارد ناحیهٔ مسطح دومی می‌شود که طول آن $d/۲$ و ضریب اصطکاک جنبشی آن دوباره ۰/۵۰ است. اگر باز قطعه به حرکت خود ادامه دهد، از شیب بدون اصطکاک دیگری آنقدر بالا می‌رود تا به توقف (لحظه‌ای) برسد. قطعه در کجا متوقف می‌شود؟ اگر محل توقف نهایی آن روی یکی از بخشهای مسطح باشد، آن بخش را تعیین کنید و فاصلهٔ L از لبهٔ چپ آن را به دست آورید. اگر قطعه به شیب آخری می‌رسد، ارتفاع H محل توقف لحظه‌ای را از بالای پایینترین بخش مسطح به دست آورید.



شکل ۸-۵۶ مسئلهٔ ۶۲

حل:

$$W_{f_k} = E_f - E_i$$

$$-W_{f_k} = +f_k d + f_k d/۲ = +\mu_k mgd + \mu_k mgd/۲$$

$$= +\frac{۳}{۲}\mu_k mgd$$

$$E_i = mgd + mg\frac{d}{۲} = \frac{۳}{۲}mgd$$

با جایگذاری داریم:

$$W_{f_k} = E_f - E_i \Rightarrow E_f = W_{f_k} + E_i$$

$$E_f = \frac{۳}{۲}mgd - \frac{۳}{۲}mgd\mu_k = \frac{۳}{۲}mgd(۱ - \mu_k)$$

$$= \frac{۳}{۲}mgd(۱ - ۰/۵)$$

یعنی ذره در پایان دومین بخش سطح دارای انرژی جنبشی است و از سطح شیب‌دار راست بالا می‌رود.

$$E_f = \frac{۳}{۴}mgd$$

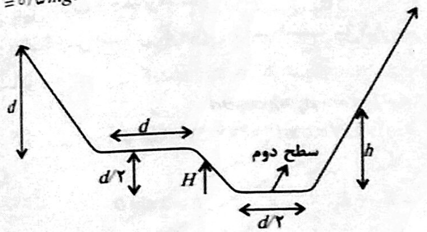
$$mgh = E_f \Rightarrow mgh = \frac{۳}{۴}mgd \Rightarrow h = ۰/۷۵d$$

جسم در بازگشت دوباره بر اثر اصطکاک انرژی از دست می‌دهد. در روی سطح دوم داریم:

$$W_{f_k} = E_f - E_i \Rightarrow E_f = -\mu_k mgd/۲ + \frac{۳}{۴}mgd$$

$$= mgd\left(\frac{۳}{۴} - ۰/۲۵\right)$$

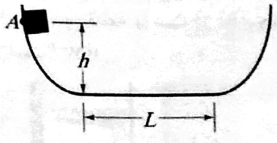
$$E_f = ۰/۵mgd$$



دوباره ملاحظه می‌شود انرژی جنبشی جسم در پایان سطح بزرگتر از صفر است. بنابراین جسم از شیب سمت چپ بالا می‌رود.

$$E_f = mgH \Rightarrow ۰/۵mgd = mgH \Rightarrow H = ۰/۵d = ۲۰\text{cm}$$

۶۳●●●- قطعهٔ کوچکی می‌تواند در امتداد مسیری که بخش میانی آن مسطح و دو انتهای آن بالا آمده است، مطابق شکل ۸-۵۷ بلغزد. طول قسمت مسطح برابر با $L = ۴۰\text{cm}$ است. بخشهای خمیدهٔ مسیر بدون اصطکاک‌اند، ولی ضریب اصطکاک جنبشی بخش مسطح برابر $\mu_k = ۰/۲۰$ است. قطعه در نقطهٔ A به ارتفاع $h = L/۲$ ، از حالت سکون رها شده است. قطعه سرانجام در چه فاصله‌ای از لبهٔ سمت چپ قسمت مسطح، متوقف می‌شود؟



شکل ۸-۵۷ مسئلهٔ ۶۳

حل: به دلیل وجود اصطکاک می‌نویسیم

$$W_{f_k} = E_f - E_i$$

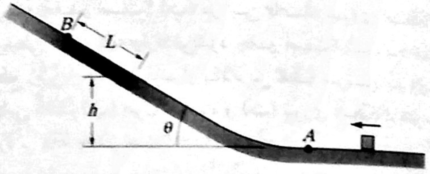
زمانی که جسم ساکن می‌شود $E_f = ۰$ است.

$$W_{f_k} = -E_i \Rightarrow -mgh = -\mu_k mgx$$

$$x = \frac{gh}{\mu_k} = \frac{h}{\mu_k} = \frac{۰/۲}{۰/۲} = ۱\text{m}$$

یعنی جسم باید طول ۱m را روی سطح طی کند که می‌شود $۲/۵ = \frac{۱}{۰/۴}$ برابر طول مسیر. یعنی رفت، برگشت و دوباره یک رفت به اندازهٔ نصف طول مسیر یعنی ۲۰cm از سمت چپ.

۶۴●●●- در شکل ۸-۵۸، قطعه‌ای بر مسیر بدون اصطکاکی [رو به بالا] می‌لغزد تا اینکه به بخشی به طول $L = ۰/۷۵\text{m}$ می‌رسد که در ارتفاع $h = ۲/۰\text{m}$ روی شیبی با زاویهٔ $\theta = ۳۰°$ آغاز می‌شود. در این بخش، ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۴۰ است. قطعه با تندی ۸/۰m/s از نقطهٔ A عبور می‌کند. اگر قطعه بتواند به نقطهٔ B برسد (جایی که اصطکاک به پایان می‌رسد)، تندی قطعه در آن نقطه چقدر است؟ و اگر نتواند به آن نقطه برسد، بیشترین ارتفاعی که در بالای نقطهٔ A می‌تواند به آن برسد چقدر است؟



شکل ۸-۵۸ مسئلهٔ ۶۴

حل: انرژی جنبشی جسم را در ارتفاع h می‌یابیم

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ = K + mgh$$

m جرم جسم است.

$$K = \frac{۱}{۲} \times m \times ۶۴ - m \times ۹/۸ \times ۲ = m(۳۲ - ۱۹/۶) = ۱۲/۴\text{m}$$

انرژی جنبشی قطعه را در B می‌یابیم.

$$W_{f_k} = E_f - E_i$$

$$E_i = ۱۲/۴\text{m}$$

$$E_f = K_f + mgL\sin\theta$$

$$W_{f_k} = -\mu_k mg\cos\theta L$$

$$\Rightarrow -\mu_k mg\cos\theta L = K_f + mgL\sin\theta - ۱۲/۴m$$

$$K_f = ۱۲/۴\text{m} - ۰/۴(۹/۸)(۰/۸۶)(۰/۷۵)\text{m}$$

$$-۹/۸(۰/۷)(۰/۵)m = ۶/۴\text{m}$$

چون $K_f > ۰$ است. پس ذره در B دارای سرعت است و می‌تواند به ارتفاع بالاتری برود.

برای یافتن تندی قطعه در نقطهٔ B داریم.

$$W_{f_k} = E_f - E_i \Rightarrow -\mu_k mgL\cos\theta = mgL\sin\theta$$

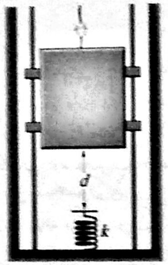
$$+ \frac{۱}{۲}mv^۲ - ۱۲/۴\text{m}$$

$$\frac{۱}{۲}v^۲ = -gL(\mu_k\cos\theta + \sin\theta) + ۱۲/۴$$

$$\frac{۱}{۲}v^۲ = -۹/۸ \times ۰/۷۵(۰/۴ \times ۰/۸۶ + ۰/۵) + ۱۲/۴$$

$$v = ۳/۵\text{m/s}$$

۶۵●●●- کابل اتاقک بالابری به جرم ۱۸۰۰kg هنگامی که اتاقک در طبقهٔ اول ساکن است و کف آن به فاصلهٔ $d = ۳/۷\text{m}$ بالای فنری با ثابت فنر $k = ۰/۱۵\text{MN/m}$ قرار دارد، مطابق شکل ۸-۵۹ پاره می‌شود. یک وسیلهٔ ایمنی، اتاقک را به میله‌های هدایت‌کنندهٔ مقابل آن محکم کرده است، طوری که نیروی اصطکاک ثابت ۴/۴kN با حرکت اتاقک مخالفت می‌کند. (الف) تندی اتاقک را درست پیش از برخورد با فنر به دست آورید. (ب) مسافت بیشینهٔ x را که فنر فشرده می‌شود به دست آورید (نیروی اصطکاک در حین این فشردگی کماکان وارد می‌شود). (پ) مسافتی را که اتاقک رو به بالا وامی‌جهد به دست آورید. (ت) با استفاده از پایستگی انرژی، مسافت کل تقریبی را که اتاقک پیش از متوقف شدن طی می‌کند بیابید. (فرض کنید نیروی اصطکاک وارد بر اتاقک در لحظه‌ای که اتاقک ساکن است، ناچیز باشد.)



شکل ۸-۵۹ مسئلهٔ ۶۵

حل: (الف)

$$W_{f_k} = E_f - E_i \Rightarrow -f_k x = \frac{۱}{۲}mv^۲ - mgx$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = -۴/۴ \times ۳/۷ \times ۱۰^۳ + ۱۸۰۰ \times ۹/۸ \times ۳/۷ = ۴۸۹۸۸\text{J}$$

$$v^۲ = \frac{۹۷۹۷۶}{۱۸۰۰} \Rightarrow v = ۷/۳۸\text{m/s}$$

(ب) E_i در اینجا همان انرژی جنبشی است که در (الف) بدست آمد.

$$W_{f_k} = E_f - E_i$$

$$-۴/۴ \times ۱۰^۳ x = \frac{۱}{۲}kx^۲ - ۴۸۹۸۸$$

$$۷۵۰۰۰x^۲ + ۴۴۰۰x - ۴۸۹۸۸ = ۰$$

$$x = ۰/۷۸\text{m}$$

(پ) مجدداً داریم

$$W_{f_k} = E_f - E_i$$

$$-۴/۴ \times ۱۰^۳ y = mgy - E_i$$

$$E_i = \frac{۱}{۲}hd^۲ = ۴۵۵۸/۷\text{J}$$

d طول فشرده شدهٔ فنر اولیه است.

$$y = ۲/۶۷\text{m}$$

(ت) آسانسور روی فنر ثابت می‌ماند و بخش از انرژی آن در آسانسور ذخیره می‌شود ولی دیگر به بالا نمی‌جهد و بخش دیگر انرژی آن براثر اصطکاک تلف شده است. طول فشرده را می‌یابیم.

$$mg = kd \Rightarrow d = \frac{mg}{k} = \frac{1800\times 9.8}{150000} = 0.12\,m$$

d: طول فشردگی فنر

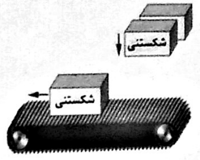
مجدداً می‌توان نوشت

$$W_{f_k} = E_f - E_i$$
$$W_{f_k} = f_k y$$

y کل مسافت طی شده

$$E_f = K_f + U_f = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$
$$E_i = K_i + U_i = 0 + mg(d+3.7)$$
$$-4400y = +\frac{1}{2}kd^2 - mg(d+3.7)$$
$$y = 15\,m$$

۶۶- در کارخانه‌ای، صندوقهایی به جرم ۳۰۰kg به طور قائم از دستگاه بسته‌بندی روی تسمه‌نقاله‌ای که با تندی ۱/۲۰m/s حرکت می‌کند، رها می‌شوند (شکل ۸-۶۰). (موتوری تندی تسمه‌نقاله را ثابت نگه می‌دارد.) ضریب اصطکاک جنبشی بین تسمه‌نقاله و هر صندوق ۰/۴۰۰ است. پس از زمان کوتاهی، لغزش صندوق بر تسمه نقاله متوقف می‌شود و سپس صندوق با تسمه‌نقاله حرکت می‌کند. برای یک دورهٔ زمانی که در طی آن صندوق نسبت به تسمه نقاله به سکون می‌رسد، برای دستگاه مختصاتی که در کارخانه ساکن است (الف) انرژی جنبشی داده شده به صندوق، (ب) بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر صندوق، و (پ) انرژی تأمین شده توسط موتور را محاسبه کنید. (ت) توضیح دهید که چرا پاسخهای (الف) و (پ) متفاوت‌اند.



شکل ۸-۶۰ مسئلهٔ ۶۶

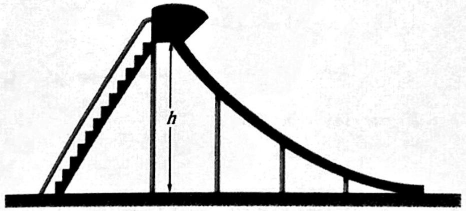
حل: (الف)
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times(300)\times(1.2)^2 = 216J$$
(ب)
$$f_k = \mu_k mg = 0.4\times 300\times 9.8 = 1176N$$
(پ)
$$W_{کل} = W_{f_k} + K$$

W_{f_k} کار نیروی اصطکاک است تا زمانی که صندوق دیگر حرکت نکند. مسافت d که صندوق روی تسمه می‌لغزد را می‌یابیم.

$$f_k = \mu_k mg = ma \Rightarrow a = \mu_k g$$
$$v^2 - v_0^2 = 2ad \Rightarrow d = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2\mu_k g}$$
$$\Rightarrow W_{f_k} = f_k d = \mu_k mgd = \mu_k mg\frac{v^2}{2\mu_k g} = \frac{1}{2}mv^2$$
$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$W = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 432J$$

(ت) چون نیروی ماشین هم باید جعبه را به حرکت وا دارد و هم بر انرژی تلف شده ناشی از نیروی اصطکاک غلبه کند.

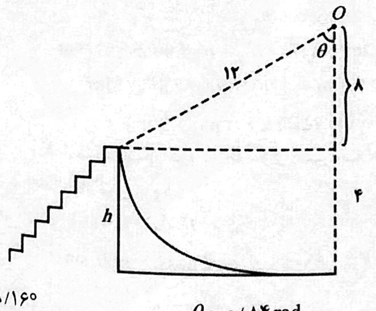
۶۷- سرسره‌ای از یک کمان دایره‌ای به شعاع ۱۲ m تشکیل شده است. ارتفاع بیشینهٔ سرسره $h = 4.0m$، و سطح زمین مماس بر دایره است (شکل ۸-۶۱). بچه‌ای به جرم ۲۵kg که از حالت سکون در بالای سرسره شروع به سُر خوردن می‌کند، در پایان سرسره تندی او برابر با ۶/۲m/s است. (الف) طول سرسره چقدر است؟ (ب) در این فاصله نیروی اصطکاک متوسطی که بر بچه وارد می‌شود چقدر است؟ اگر، به جای سطح زمین، یک خط قائم از *بالاترین نقطهٔ سرسره* بر دایره مماس باشد، (پ) طول سرسره و (ت) نیروی اصطکاک متوسط وارد بر بچه چقدر است؟



شکل ۸-۶۱ مسئلهٔ ۶۷

حل: (الف) از روی شکل

$$S = R\theta$$
$$\cos\theta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$



$$\theta = 48.160$$
$$\theta = 0.84\,rad$$

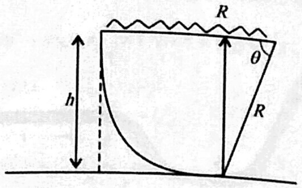
طول کمان $S = 12\times 0.84 = 10.08\,m$

(ب) به دلیل اصطکاک داریم:

$$W_{f_k} = E_f - E_i$$
$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 25\times(6.2)^2 = 480.5J$$
$$E_i = mgh = 25\times 9.8\times 4 = 980J$$

$$W_{f_k} = -499.5J \qquad W_{f_k} = -\bar{f}_k S$$
$$\bar{f}_k = \frac{499.5}{10.08} = 49.55J$$
$$S = R\theta$$

(پ) از روی شکل داریم:



$$\sin\theta = \frac{h}{R} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \qquad \theta = 0.34\,rad$$
$$s = 12\times 0.34 = 4.08\,m$$

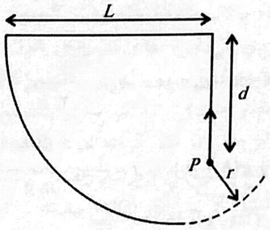
(ت) به دلیل وجود اصطکاک داریم:

$$W_{f_k} = E_f - E_i$$
$$-\bar{f}_k s = E_f - E_i = -499.5J$$
$$\bar{f}_k = \frac{499.5}{4.08} = 122.43N$$

۶۸- در شکل ۸-۳۷، به یک سر ریسمانی به طول $L = 120cm$ گلوله‌ای متصل شده و سر دیگر آن در جایی ثابت شده است. گلوله با رها شدن از حالت سکون تا لحظه‌ای که ریسمان به میخ گیر کند رو به پایین تاب می‌خورد و سپس حول میخ رو به بالا می‌چرخد. برای این که گلوله کاملاً به دور میخ بچرخد، مسافت d از چه مقداری باید بیشتر باشد؟ (*راهنمایی:* گلوله باید باز هم در بالاترین نقطهٔ تاب خوردن خود در حال حرکت باشد. آیا می‌دانید چرا؟)

حل: وقتی گلوله به بالاترین نقطهٔ مسیر می‌رسد داریم:

$$T + mg = mv^2/r$$
$$T = mv^2/r - mg$$



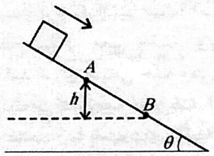
اگر $T = 0$ باشد، گلوله به حرکت خود ادامه نمی‌دهد پس باید $T > 0$ باشد، برای یافتن mv^2/r از بقای انرژی استفاده می‌کنیم

$$m\frac{v^2}{r} > mg$$
$$E_i = E_f \Rightarrow E_i = 0$$
$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 - mg(d-r) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg(d-r)$$
$$d = L - r$$
$$mv^2 = 2mg(d-r) \Rightarrow mv^2 = 2mg(L-2r)$$
$$m\frac{v^2}{r} = 2mg\left(\frac{L}{r} - 2\right) = 2mg\frac{L}{r} - 4mg$$
$$m\frac{v^2}{r} > mg \Rightarrow 2mg\frac{L}{r} - 4mg > mg$$
$$2mg\frac{L}{r} > 5mg \Rightarrow \frac{L}{r} > 2.5 \Rightarrow r < \frac{L}{2.5}$$
$$r < \frac{1.2}{2.5} = 0.48m$$

بنابراین r باید کوچکتر از ۰/۴۸m باشد، یعنی d باید بزرگتر از ۱/۲−۰/۴۸ = ۰/۷۲m باشد.

۶۹- در شکل ۸-۵۲، قطعه‌ای رو به پایین بر سطح شیبدار بدون اصطکاکی لغزانده می‌شود. تندی آن در نقطه‌های A و B به ترتیب برابر ۲/۰۰m/s و ۲/۶۰m/s است. سپس، دوباره قطعه رو به پایین بر سطح شیبدار لغزانده می‌شود، ولی این بار تندی آن در نقطهٔ A برابر ۴/۰۰m/s است. در این صورت تندی آن در نقطهٔ B چقدر است؟ SSM

حل: از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم و ارتفاع h را می‌یابیم. مبدأ سطح B است.



$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$
$$2gh = v_f^2 - v_i^2 \Rightarrow h = \frac{(2.6)^2 - 4}{2\times 9.8} = 0.14m$$

در حالت دوم دوباره از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. تراز انرژی پتانسیل سطح B است.

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$
$$v_f^2 = v_i^2 + 2gh \Rightarrow v_f = \sqrt{16 + 19.6\times 0.14} = 4.3\,m/s$$

۷۰- معلوم شده است که فنر مشخصی از قانون هوک پیروی *نمی‌کند*. وقتی که این فنر به اندازهٔ x (برحسب متر) کشیده شود، پی برده می‌شود که فنر نیرویی به بزرگی (برحسب نیوتون) $52.8x + 38.4x^2$ در خلاف جهت کشیدگی به آن وارد می‌کند. (الف) کار لازم برای کشیدن فنر از $x = 0.500m$ تا $x = 1.00m$ را محاسبه کنید. (ب) یک سر فنر در جایی ثابت شده و در حالی که به سر دیگر آن قطعهٔ کوچکی به جرم ۲/۱۷kg متصل شده است به اندازهٔ $x = 1.00m$ کشیده می‌شود. حال اگر قطعه را از حالت سکون رها کنیم، تندی آن در لحظه‌ای که کشیدگی فنر برابر با $x = 0.500m$ است، چقدر خواهد بود؟ (پ) آیا نیروی وارد شده از این فنر پایستار است یا ناپایستار؟ توضیح دهید.

حل: (الف)
$$W = \int F(x)dx = \int_{0.5}^{1}(52.8x + 38.4x^2)dx$$
$$W = 29.1x^2 + 12.8x^2\Big|_{0.5}^{1} = 31\,J$$

(ب) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + U_i = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ + U_f$$

$$\frac{۱}{۲}mv_f^۲ = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + (U_i - U_f)$$

$$U_i - U_f = W = +۳۱\text{J}$$

$$v_f^۲ = v_i^۲ + \frac{۲}{m}(U_i - U_f) \Rightarrow v_f^۲ = ۰ + \frac{۲}{۲/۱۷}۳۱ \Rightarrow v_f = ۵/۳۴\text{m/s}$$

(پ) چون می‌توانیم برای این نیرو یک انرژی پتانسیل تعریف کنیم (زیرا نیروی وابسته به آن به فاصله بستگی دارد). پس نیرو پایستار است.

۷۱- جعبه‌ای به جرم ۱۸۰kg که به حالت سکون در بالای شیبی به طول ۳/۷m و زاویهٔ شیب ۳۹° نسبت به افق قرار دارد به طور اتفاقی از دستهای یک کارگر کارخانه رها می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و سطح شیبدار، و بین جعبه و کف افقی کارخانه ۰/۲۸ است. (الف) تندی جعبه هنگامی که به پایین سطح شیبدار می‌رسد چقدر است؟ (ب) در پی رسیدن جعبه به پایین سطح شیبدار، جعبه چقدر روی کف کارخانه می‌لغزد؟ (فرض کنید انرژی جنبشی جعبه وقتی که از شیب به کف کارخانه حرکت می‌کند، تغییر نمی‌کند.) (پ) اگر جرم جعبه را نصف کنیم، آیا پاسخهای (الف) و (ب) افزایش می‌یابند یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌مانند؟

حل:

(الف)

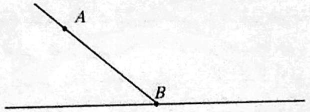
$$W_{f_k} = E_f - E_i$$

$$-\mu_k mgL\cos\theta = \frac{۱}{۲}mv^۲ - mgL\sin\theta$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = mgL(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

$$\Rightarrow v^۲ = ۲gL(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

$$v = \sqrt{۱۹/۶\times۳/۷(\sin(۳۹°) - ۰/۲۸\cos(۳۹°))} = ۵/۴۶\text{m/s}$$



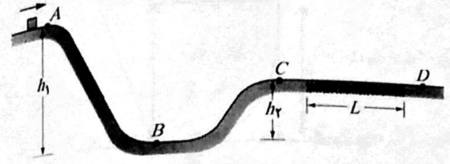
(ب) جعبه زمانی می‌ایستد که تمام انرژی جنبشی آن بر اثر اصطکاک از بین برود.

$$W_{f_k} = E_f - E_i \qquad E_f = ۰$$

$$-f_k d = -E_i \Rightarrow d = \frac{E_i}{f_k} = \frac{\frac{۱}{۲}m(۵/۴۶)^۲}{m\times۰/۲۸\times۹/۸} = ۵/۴\text{m}$$

(پ) ملاحظه می‌شود جواب نهایی به جرم بستگی ندارد.

۷۲- در شکل ۸-۶۲ قطعهٔ کوچکی از نقطهٔ A با تندی ۷/۰m/s فرستاده می‌شود. مسیر قطعه تا هنگامی که به بخشی به طول L=۱۲m برسد، که در آنجا ضریب اصطکاک جنبشی برابر ۰/۷۰ است، بی اصطکاک است. بلندیهای مشخص شده در شکل $h_۱$=۶/۰m و $h_۲$=۲/۰m است. تندی قطعه در (الف) نقطهٔ B و (ب) نقطهٔ C چقدر است؟ (پ) آیا قطعه به نقطهٔ D می‌رسد؟ اگر می‌رسد، تندی آن در آنجا چقدر است؟ و اگر نمی‌رسد، چه مسافتی را در بخش با اصطکاک طی می‌کند؟



شکل ۸-۶۲ مسئلهٔ ۷۲

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

$$E_i = E_f$$

$$\frac{۱}{۲}mv_i^۲ + mgh_i = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ \Rightarrow v_f^۲ = v_i^۲ + ۲gh_i$$

$$h_i = h_۱$$

$$v_f = \sqrt{۴۹ + ۱۹/۶\times۶} = ۱۲/۹\text{m/s}$$

(ب)

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + mgh_۱ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ + mgh_۲$$

$$v_f^۲ = v_i^۲ + ۲g(h_۱ - h_۲) \Rightarrow v_f = \sqrt{۴۹ + ۱۹/۶\times۴} = ۱۱/۲۸\text{m/s}$$

(پ) انرژی جنبشی ذره را در پایان طول L می‌یابیم.

$$W_{fh} = E_f - E_i$$

$$-f_k L = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ + mgh_۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲ - mgh_۱$$

$$-\mu mgL = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + mg(h_۲ - h_۱)$$

$$\frac{۱}{۲}v_f^۲ = \frac{۱}{۲}v_i^۲ + g(h_۱ - h_۲) - \mu gl$$

با عددگذاری ملاحظه می‌شود که انرژی جنبشی منفی می‌گردد پس ذره به D نمی‌رسد. طولی که روی سطح می‌پیماید را می‌یابیم.

$$K_f = ۰$$

$$W_{f_k} = E_f - E_i \Rightarrow -\mu_k mgx = mgh_۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲ - mgh_۱$$

$$\mu_k gx = \frac{۱}{۲}v_i^۲ + g(h_۱ - h_۲) \Rightarrow x = \frac{\frac{۱}{۲}v_i^۲ + g(h_۱ - h_۲)}{\mu_k g}$$

$$x = \frac{\frac{۱}{۲}\times۴۹ + ۴\times۹/۸}{۰/۷\times۹/۸} = ۹/۲۸\text{m}$$

۷۳- ظرف نوشابه‌ای به جرم ۲/۵۰kg مستقیماً رو به پایین از بلندی ۴/۰۰m با تندی اولیهٔ ۳/۰۰m/s پرتاب شده است. می‌توان کشش هوای وارد بر ظرف را نادیده گرفت. انرژی جنبشی ظرف (الف) هنگامی که در انتهای مسیر سقوط خود به سطح زمین می‌رسد و (ب) هنگامی که در نیمه راه مسیر خود تا رسیدن به سطح زمین است، چقدر است؟ (پ) انرژی جنبشی ظرف و (ت) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه ظرف- زمین، ۰/۲۰۰s پیش از آنکه ظرف به سطح زمین برسد، چقدر است؟ برای این قسمت، نقطهٔ مرجع $y=۰$ را در سطح زمین اختیار کنید.

حل: (الف)

$$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$U_f = ۰$$

$$K_f = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + mgh_i = \frac{۱}{۲}\times۲/۵\times۹ + ۲/۵\times۹/۸\times۴ = ۱۰۹/۲۵\text{J}$$

(ب)

$$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$K_f = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + u_i - u_f = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + mgh - mg\frac{h}{۲} = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}mgh$$

$$K_f = \frac{۱}{۲}\times۲/۵\times۹ + \frac{۱}{۲}\times۲/۵\times۹/۸\times۴ = ۶۰/۲۵\text{J}$$

(پ)

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ - v_۰t + y_۰$$

$$۴ = ۴/۹t^۲ + ۳t = ۴/۹t^۲ + ۳t - ۴ = ۰ \Rightarrow t = ۰/۶۴۸\text{s}$$

زمان رسیدن به زمین $t = ۰/۶۴۸\text{s}$ است.

$$v = gt + v_۰ = ۹/۸\times(۰/۶۴۸ - ۰/۲) + ۳ = ۷/۴\text{m/s}$$

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}\times۲/۵(۷/۴)^۲ = ۶۸/۴۵\text{J}$$

(ت) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

$$E_i = E_f \Rightarrow mgh + \frac{۱}{۲}mv_i^۲ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ + U_f$$

$$U_f = mgh + \frac{۱}{۲}m(v_i^۲ - v_f^۲) = ۲/۵(۹/۸)(۴) + ۰/۵(۲/۵)(۹ - ۵۴/۷۶) = ۴۰/۸\text{J}$$

۷۴- یک بالون آبی به جرم ۱/۵۰kg با تندی اولیهٔ ۳/۰۰m/s مستقیماً رو به بالا پرتاب شده است. (الف) انرژی جنبشی بالون درست در لحظهٔ پرتاب شدن، چقدر است؟ (ب) در طی صعود کامل بالون، نیروی گرانشی چقدر کار روی بالون انجام می‌دهد؟ (پ) در طی صعود کامل، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه بالون- زمین چقدر است؟ (ت) اگر انرژی پتانسیل گرانشی در نقطهٔ پرتاب برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن در لحظه‌ای که بالون به ارتفاع بیشینه‌اش می‌رسد چقدر است؟ (ث) حال اگر، انرژی پتانسیل گرانشی در ارتفاع بیشینه برابر صفر در نظر گرفته شود، مقدار آن در نقطهٔ پرتاب چقدر است؟ (ج) ارتفاع بیشینه چقدر است؟

حل: (الف)

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}\times۱/۵\times(۳)^۲ = ۶/۷۵\text{J}$$

(ب) نیروی گرانش کاری معادل انرژی جنبشی اولیه بالون انجام می‌دهد. یعنی ‎-۶/۷۵J‎ علامت منفی به این دلیل است که نیرو و جابه‌جایی خلاف جهت هم هستند.

(پ) این تغییر برابر با تغییر انرژی جنبشی کل است.

$$E_i = E_f \Rightarrow U_i + K_i = U_f + K_f \Rightarrow K_f - K_i = U_i - U_f$$

$$\Delta U = U_f - U_i = K_i - K_f = ۶/۷۵\text{J}$$

(ت) این مقدار ۶/۷۵J است.

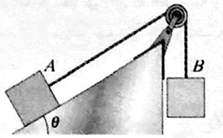
(ث) این مقدار ‎-۶/۷۵ J‎ است.

(ج)

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^۲ = mgh \Rightarrow h = \frac{v^۲}{۲g}$$

$$h = \frac{۹}{۱۹/۶} = ۰/۴۶\text{m}$$

۷۵- در شکل ۸-۶۳، جرم قرقره ناچیز است، و قرقره و سطح شیبدار هر دو بدون اصطکاک‌اند. جرم قطعهٔ A برابر ۱/۰kg، جرم قطعهٔ B برابر ۲/۰kg، و زاویهٔ θ برابر ۳۰° است. اگر قطعه‌ها که با ریسمان محکمی به هم متصل شده‌اند از حالت سکون رها شوند، هنگامی که قطعهٔ B به اندازهٔ ۲۵cm سقوط کند، انرژی جنبشی کل آنها چقدر است؟ SSM



شکل ۸-۶۳ مسئلهٔ ۷۵

حل: از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. حالت ابتدایی سیستم را $U=۰$ در نظر می‌گیریم.

جسم A به اندازهٔ $h = y\sin\theta$ بالا می‌رود.

$$E_i = E_f$$

$$۰ = \frac{۱}{۲}m_A v_A^۲ + \frac{۱}{۲}m_B v_B^۲ + m_A gy\sin\theta - m_B gy$$

$$\frac{۱}{۲}(m_A v_A^۲ + m_B v_B)^۲ = m_B gy - m_A gy\sin\theta = gy(m_B - m_A\sin\theta)$$

$$K_A + K_B = ۹/۸\times۰/۲۵(۲ - ۰/۵\times۱) = ۳/۶۷۵\text{J}$$

۷۶- پرتابه‌ای به جرم ۰/۵۵kg از لبهٔ صخره‌ای، با انرژی جنبشی اولیهٔ ۱۵۵۰J پرتاب شده است. جابه‌جایی رو به بالای بیشینهٔ پرتابه از نقطهٔ پرتاب برابر با ۱۴۰m+ است. (الف) مؤلفهٔ افقی و (ب) مؤلفهٔ قائم سرعت پرتابه در لحظهٔ پرتاب، چقدر است؟ (پ) در لحظه‌ای که مؤلفهٔ قائم سرعت برابر ۶۵m/s است، جابه‌جایی قائم پرتابه از نقطهٔ پرتاب چقدر است؟

حل: (الف)

$$\frac{۱}{۲}m(v_x^۲ + v_y^۲) = ۱۵۵۰ \Rightarrow (v_{۰x}^۲ + v_{۰y}^۲) = ۵۶۳۶/۳۶$$

در اوج $v_y = ۰$ است.

$$E_i = E_f \Rightarrow ۱۵۵۰ = \frac{۱}{۲}(۰/۵۵)(v_{۰x})^۲ + ۰/۵۵(۹/۸)(۱۴۰)$$

$$\Rightarrow v_{۰x}^۲ = ۲۸۹۲/۳۶ \Rightarrow v_x = ۵۳/۷۸\text{m/s}$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف) داریم.

$$v_{۰y} = ۵۲/۳۸\text{m/s}$$

(پ)

$$v_y^۲ - v_{۰y}^۲ = -۲g\Delta y \Rightarrow \Delta y = -\frac{v_y^۲ - v_{۰y}^۲}{۲g} = -\frac{(۶۵)^۲ - (۵۲/۳۸)^۲}{۱۹/۶} = -۷۵/۵۸\text{m}$$

یعنی در پایین نقطهٔ پرتاب، پرتابه به این سرعت می‌رسند.

۷۷- تنها نیروی وارد بر یک ذره، نیروی پایستار $\vec{F}$ است. وقتی ذره در نقطهٔ A است، انرژی پتانسیل دستگاه وابسته به نیروی $\vec{F}$ برابر با ۴۰ J است. وقتی ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B برود، نیروی $\vec{F}$ کاری برابر ۲۵ J+ روی آن انجام می‌دهد. وقتی ذره در نقطهٔ B است، انرژی پتانسیل دستگاه چقدر است؟

حل: کاری که روی ذره انجام می‌شود، به صورت انرژی پتانسیل در آن ذخیره می‌شود.

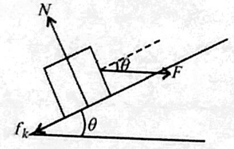
$$U(x)=-\int F(x)dx \Rightarrow U(B)-U(A)=-\int_A^B F(x)dx=-W$$
$$\Rightarrow U(B)=-W+U(A)=-۲۵+۴۰=۱۵J$$

۷۸- یک نیروی افقی ثابت، چمدانی به جرم ۵۰kg را به اندازهٔ ۶/۰m روی شیبی ۳۰° با تندی ثابت حرکت می‌دهد. ضریب اصطکاک جنبشی بین چمدان و سطح شیبدار برابر ۰/۲۰ است. (الف) کار انجام شده توسط نیروی به کار رفته و (ب) افزایش انرژی گرمایی چمدان و سطح شیبدار چقدر است؟

حل: (الف)

$W=\vec{F}\cdot\vec{d}$

$f_k=\mu_k N$



$N=mg\cos\theta+F\sin\theta$

$mg\sin\theta+f_k=F\cos\theta$

$\Rightarrow mg\sin\theta+\mu_k(mg\cos\theta+F\sin\theta)=F\cos\theta$

$mg(\sin\theta+\mu\cos\theta)=F(\cos\theta-\mu\sin\theta)$

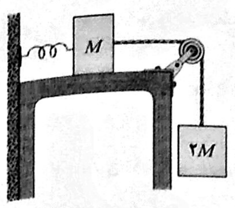
$F=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}mg \Rightarrow F=\frac{۰/۵+۰/۲\times۰/۸۶}{۰/۸۶-۰/۲\times۰/۵}۵۰\times۹/۸$

$F=\frac{۳۲۹/۲۸}{۰/۷۶}N=۴۳۳/۲۶N$

$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=Fd\cos\theta=۴۳۳/۲۶\times۶\times۰/۸۶=۲۲۳۵/۶J$

(ب) چون انرژی جنبشی زیاد نمی‌شود. کار نیروی اصطکاک برابر است با $-W$. این کار به صورت گرما ظاهر می‌شود.

۷۹- همان‌گونه که در شکل ۸-۶۴ نشان داده شده است، دو قطعه به جرمهای $M=۲/۰kg$ و $۲M$ به فنری با ثابت فنر $k=۲۰۰N/m$ متصل شده‌اند که یک سر آن به دیواری ثابت شده است. سطح افقی و قرقره بدون اصطکاک‌اند و می‌توان جرم قرقره را نادیده گرفت. قطعه‌ها از حالت سکون در وضعیتی که فنر واهلیده است، رها می‌شوند. وقتی قطعهٔ آویزان به اندازهٔ ۰/۰۹۰m سقوط کرد (الف) انرژی جنبشی ترکیب دو قطعه و (ب) انرژی جنبشی قطعهٔ آویزان چقدر است؟ (پ) فاصلهٔ بیشینه‌ای که قطعهٔ آویزان تا پیش از توقف لحظه‌ای سقوط می‌کند چقدر است؟



شکل ۸-۶۴ مسئلهٔ ۷۹

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. مکان جسم M در حالت اول را $U=۰$ در نظر می‌گیریم.

$E_i=E_f \Rightarrow ۰=K_M+K_{۲M}+\frac{۱}{۲}kx^۲-۲Mgx$

$(K_M+K_{۲M})=۲Mgx-\frac{۱}{۲}kx^۲$

$(K_M+K_{۲M})=۴\times۹/۸\times۰/۰۹-\frac{۱}{۲}\times۲۰۰\times(۰/۰۹)^۲=۲/۷۲J$

(ب) $K_{۲M}=۲K_M \Rightarrow \frac{۳}{۲}K_{۲M}=۲/۷۲J \Rightarrow K_{۲M}=۱/۸۱J$

(پ) در زمان توقف انرژی جنبش صفر است.

$۰=۰+\frac{۱}{۲}kx^۲-۲Mgx \Rightarrow \frac{۱}{۲}kx^۲-۲Mgx=۰$

$\frac{۱}{۲}kx=۲Mg \Rightarrow x=\frac{۴Mg}{k} \Rightarrow x=\frac{۴\times۲\times۹/۸}{۲۰۰}=۰/۳۹۲m$

۸۰- جریان حاصل از خاکسترهای یک آتشفشان که در حال حرکت روی سطحی افقی است، با یک شیب رو به بالای ۱۰° مواجه می‌شود. جبههٔ این جریان پیش از متوقف شدن، ۹۲۰m رو به بالای شیب حرکت می‌کند. فرض کنید گازهای به دام افتاده در جریان، آن را از سطح زمین بالا ببرند و بدین ترتیب بتوان نیروی اصطکاک وارد از زمین را نادیده گرفت؛ همچنین فرض کنید انرژی مکانیکی جبههٔ جریان پایسته است. تندی اولیهٔ جبههٔ جریان چقدر بوده است؟

حل:

$E_i=E_f \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_i^۲=mgh \Rightarrow v_i^۲=۲gh$

$h=d\sin\theta$

$v_i=\sqrt{۱۹/۶\times۹۲۰\times\sin(۱۰)^\circ}=۵۶\,m/s$

۸۱- موزی به جرم ۰/۵۰kg که با تندی اولیهٔ ۴/۰۰m/s مستقیماً رو به بالا پرتاب شده است به ارتفاع بیشینهٔ ۰/۸۰m می‌رسد. در طی بالا رفتن، نیروی کشش هوا موجب چه تغییری در انرژی مکانیکی دستگاه موز- زمین می‌شود؟

حل:

$W_{f_k}=E_f-E_i$

$E_i=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}\times۰/۵\times۱۶=۴J$

$E_f=mgh=۰/۵\times۹/۸\times۰/۸=۳/۹۲J$

$W_{f_k}=-۰/۰۸J$

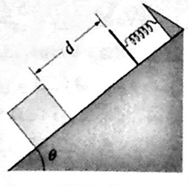
۸۲- اگر بازیکن بیسبال به جرم ۷۰kg درست در لحظه‌ای که به زمین می‌خورد با تندی اولیهٔ ۱۰m/s روی زمین سر بخورد (الف) کاهش در انرژی جنبشی بازیکن و (ب) افزایش انرژی گرمایی بدن بازیکن و سطح زمین در امتداد مسیر لغزش، تا لحظهٔ توقف چقدر است؟

حل: (الف)

$\Delta K=K_f-K_i=۰-K_i=-K_i=-\frac{۱}{۲}\times۷۰\times۱۰۰=-۳۵۰۰J$

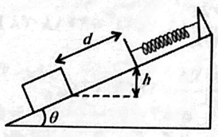
(ب) تمام این انرژی تا توقف کامل به گرما تبدیل می‌شود.

۸۳- فنری $(k=۲۰۰N/m)$ در انتهای سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta=۴۰°$ ثابت شده است (شکل ۸-۶۵) قطعه‌ای به جرم ۱/۰kg از مکان اولیه‌اش که به فاصلهٔ $d=۰/۶۰m$ از انتهای فنر واهلیده قرار دارد، با انرژی جنبشی اولیهٔ ۱۶ J رو به بالای شیب پرتاب می‌شود. (الف) در لحظه‌ای که قطعه، فنر را به اندازهٔ ۰/۲۰m فشرده می‌کند، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (ب) برای آنکه قطعه در هنگامی که فنر به اندازهٔ ۰/۴۰m فشرده شده است به طور لحظه‌ای متوقف شود، انرژی جنبشی قطعه موقع پرتاب باید چقدر باشد؟ **SSM**



شکل ۸-۶۵ مسئلهٔ ۸۳

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.



$E_i=E_f$

$E_i=۱۶J \qquad h=(d+x)\sin\theta$

$E_f=K_f+mg(d+x)\sin\theta+\frac{۱}{۲}kx^۲$

$E_f=K_f+۱\times۹/۸(۰/۶+۰/۲)\sin(۴۰°)+\frac{۱}{۲}\times۲۰۰\times(۰/۲)^۲=۹J$

$K_f=E_i-۹=۱۶-۹=۷J$

(ب) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

$E_i=E_f \Rightarrow K_i=mg(d+x)\sin\theta+\frac{۱}{۲}kx^۲$

$K_i=۹/۸(۰/۶+۰/۴)\sin(۴۰)+\frac{۱}{۲}\times۲۰۰(۰/۴)^۲=۲۲/۳J$

۸۴- میمونی به جرم ۳/۲kg در ارتفاع ۳/۰m بالای سطح زمین آویزان است. (الف) اگر نقطهٔ مرجع $y=۰$ را بر سطح زمین در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه میمون- زمین چقدر است؟ اگر میمون به زمین بپرد و با فرض آنکه کشش هوای وارد بر آن ناچیز باشد، (ب) انرژی جنبشی و (پ) تندی میمون درست پیش از رسیدن به زمین چقدر است؟

حل: (الف) $U=mgh=۳/۲\times۹/۸\times۳=۹۴/۰۸J$

(ب) $E_i=E_f \Rightarrow K_f=E_i=۹۴/۰۸J$

(پ) $\frac{۱}{۲}mv^۲=mgh \Rightarrow v=\sqrt{۲gh}=\sqrt{۱۹/۶\times۳}=۷/۶۷m/s$

۸۵- ماشینی چمدانی به جرم ۴۰kg را به اندازهٔ ۲/۰m روی شیبی با زاویهٔ شیب ۴۰° با سرعت ثابت رو به بالا می‌کشد. نیروی وارد از ماشین به چمدان به موازات شیب و ضریب اصطکاک جنبشی بین چمدان و سطح شیبدار ۰/۴۰ است. (الف) کار انجام شده توسط نیروی ماشین روی چمدان و (ب) افزایش انرژی گرمایی چمدان و سطح شیبدار چقدر است؟

حل: (الف)

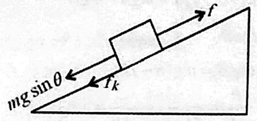
$F=f_k+mg\sin\theta$

$F=\mu_k mg\cos\theta+mg\sin\theta$

$F=mg(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)$

$F=۴۰\times۹/۸(\sin(۴۰°)+۰/۴\cos(۴۰°))=۳۷۲/۱N$

$W=Fd=۳۷۲/۱\times۲=۷۴۴/۲J$



(ب) $Q=-W_{f_k}=f_kd=\mu_k mg\cos\theta=۲۴۰/۲۳J$

۸۶- کشتی مجلل *ملکه الیزابت دوم* دارای نیروگاه دیزلی- الکتریکی با توان بیشینهٔ ۹۲ MW در تندی ۳۲/۵ گره دریایی است. در این تندی، چه نیروی رو به جلویی بر کشتی وارد می‌شود؟ (۱ knot (گره) = ۱/۸۵۲ km/h)

حل:

$v=۳۲/۵\times۱/۸۵۲\frac{۱}{۳/۶}=۱۶/۷m/s$

$P=Fv \Rightarrow F=\frac{P}{v}=\frac{۹۲\times۱۰^۶}{۱۶/۷}=۵/۵\times۱۰^۶\,N$

۸۷- دمای یک مکعب پلاستیکی هنگامی که مکعب توسط نیروی افقی ۱۵N به اندازهٔ ۳/۰m روی کفی با تندی ثابت هل داده شده، اندازه گرفته شده است. اندازه‌گیری نشان می‌دهد که انرژی گرمایی مکعب به اندازهٔ ۲۰J افزایش یافته است. افزایش انرژی گرمایی کف در امتدادی که مکعب لغزیده چقدر است؟ **SSM**

حل: کار نیروی اصطکاک با کار نیروی خارجی برابر است

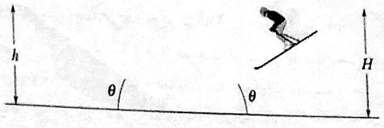
$|W_{f_k}|=Fd=۱۵\times۳=۴۵J$

کار نیروی اصطکاک به گرما تبدیل می‌شود.

$۴۵=۲۰+Q \Rightarrow Q=۲۵J$

۸۸- دو قلهٔ برفی دارای بلندیهای $H=۸۵۰m$ و $h=۷۵۰m$ هستند که یک دره میان آنها قرار دارد. یک مسیر اسکی به طول

کلی ۳/۲ km و شیب میانگین $\theta = ۳۰°$ میان دو قله امتداد یافته است (شکل ۸-۶۶). (الف) اسکی بازی از حالت سکون از قلهٔ بلندتر شروع به حرکت می‌کند. اگر او از چوبهای اسکی استفاده نکند و اصطکاک ناچیز باشد، با چه تندی به نوک قلهٔ کوتاهتر می‌رسد؟ (ب) به طور تقریبی، ضریب اصطکاک جنبشی بین برف و اسکیها باید چقدر باشد تا او درست در نوک قلهٔ کوتاهتر متوقف شود؟



شکل ۸-۶۶ مسئلهٔ ۸۸

حل: (الف)

$E_i = E_f$

$MgH = mgh + K \Rightarrow K = mg(H-h)$

$\frac{۱}{۲}mv^۲ = mg(H-h) \Rightarrow v = \sqrt{۲g(H-h)}$

$v = \sqrt{۱۹/۶ \times ۱۰۰} = ۴۴/۲۷\, m/s$

(ب) $W_{f_k} = E_f - E_i \Rightarrow -f_k d = mgh - mgH$

$f_k = \mu_k mg\cos\theta$

$\Rightarrow -\mu_k mgd\cos\theta = mg(h-H)$

$\Rightarrow \mu_k = \frac{H-h}{d\cos\theta} = \frac{۱۰۰}{۳۲۰۰ \times ۰/۸۶} = ۰/۰۳$

۸۹- شناگری در آب با تندی متوسط ۰/۲۲m/s حرکت می‌کند. نیروی کششی متوسط ۱۱۰N است. شناگر به چه توان متوسطی برای شناکردن نیاز دارد؟

حل: شناگر باید نیروی ۱۱۰N برخلاف جهت نیروی آب وارد کند.

$P = Fv = ۱۱۰ \times ۰/۲۲ = ۲۴/۲\, w$

۹۰- وزن اتومبیلی با مسافرانش ۱۶۴۰۰N است و هنگامی که راننده ترمز می‌کند، اتومبیل با تندی ۱۱۳km/h در حال حرکت است. بزرگی نیروی اصطکاکی که جاده بر چرخها وارد می‌کند برابر ۸۲۳۰N است. پس از ترمز، اتومبیل تا لحظهٔ توقف می‌لغزد. فاصلهٔ توقف را به دست آورید.

حل:

$W_{f_k} = E_f - E_i \qquad E_f = ۰$

$-f_k d = -\frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow d = \frac{۱}{۲} \times \frac{mgv^۲}{g f_k}$

$d = \frac{۰/۵ \times ۱۶۴۰۰ \times (۳۱/۸)^۲}{۹/۸ \times ۸۲۳۰} = ۱۰۰/۱۷m$

۹۱- گلوله‌ای به جرم ۰/۶۳kg با تندی اولیهٔ ۱۴ m/s مستقیماً رو به بالا پرتاب می‌شود و به ارتفاع بیشینهٔ ۸/۱m می‌رسد. در حین بالا رفتن گلوله تا ارتفاع بیشینه، انرژی مکانیکی دستگاه گلوله- زمین چقدر تغییر می‌کند؟

حل:

$\Delta E = E_f - E_i = mgh - \frac{۱}{۲}mv^۲$

$\Delta E = ۰/۶۳ \times ۹/۸ \times ۸/۱ - \frac{۱}{۲} \times ۰/۶۳ \times (۱۴)^۲ = -۱۱/۷۲J$

یعنی انرژی به دلیل وجود اصطکاک کاهش می‌یابد.

۹۲- نوک قلهٔ اورست ۸۸۵۰m بالاتر از سطح دریاست. (الف) یک کوه‌نورد به جرم ۹۰kg برای رسیدن به نوک قله از سطح دریا چه مقدار انرژی باید در مقابل نیروی گرانشی وارد بر او صرف کند؟ (ب) اگر هر شکلات مقداری انرژی برابر ۱/۲۵MJ داشته باشد، چند عدد شکلات این انرژی را تأمین خواهند کرد؟ پاسخ شما باید این نکته را روشن کند که کار انجام شده در مقابل نیروی گرانشی، بخش بسیار کوچکی از انرژی صرف شده در صعود از یک کوه است.

حل: (الف)

$U = mgh = ۹۰ \times ۹/۸ \times ۸۸۵۰ = ۷/۸ \times ۱۰^۶\, J$

(ب) تعداد شکلات برابر است با:

$\frac{۷/۸ \times ۱۰^۶}{۱/۲۵ \times ۱۰^۶} = ۶/۲۴$

۹۳- دوندهٔ دو سرعتی به وزن ۶۷۰N با شروع از حالت سکون و با شتابی یکنواخت، ۷/۰m ابتدای مسابقه را در مدت ۱/۶s می‌دود. (الف) تندی و (ب) انرژی جنبشی دونده در انتهای ۱/۶s چقدر است؟ (پ) دونده چه توان متوسطی در طی این بازهٔ ۱/۶ ثانیه‌ای تولید کرده است؟

حل: (الف)

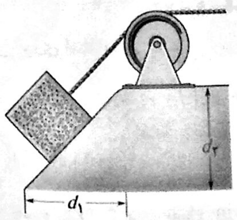
$x = \frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow a = \frac{۲x}{t^۲} = \frac{۱۴}{(۱/۶)^۲} = ۵/۴۷\, m/s$

$v = at = ۵/۴۷ \times ۱/۶ = ۸/۷۵۲\, m/s$

(ب) $K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}\frac{۶۷۰}{۹/۸}(۸/۷۵۲)^۲ = ۲۶۱۸/۳۸J$

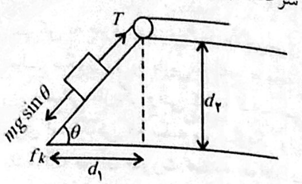
(پ) $\overline{P} = \frac{\Delta K}{t} = \frac{۲۶۱۸/۳۸}{۱/۶} = ۱۶۳۶/۴۹\, w$

۹۴- در شکل ۸-۶۷ قطعه‌ای از سنگ گرانیت به جرم ۱۴۰۰kg توسط کابل و قرقره‌ای با تندی ثابت ۱/۳۴m/s روی شیبی بالا کشیده می‌شود. فاصله‌های مشخص شده عبارت‌اند از $d_۱ = ۴۰m$ و $d_۲ = ۳۰m$. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و سطح شیبدار ۰/۴۰ است. توان ناشی از نیرویی که کابل بر قطعه وارد می‌کند چقدر است؟



شکل ۸-۶۷ مسئلهٔ ۹۴

حل: چون سرعت ثابت است، برآیند نیروها صفر است.



$T = mg\sin\theta + f_k = mg(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$

$\sin\theta = \frac{۳}{۵} \qquad \cos\theta = \frac{۴}{۵}$

$T = ۱۴۰۰ \times ۹/۸(۰/۶ + ۰/۴ \times ۰/۸) = ۱۲۶۲۲/۴N$

$P = Tv = ۱۶۹۱۴/۰۱۶\, w$

۹۵- گلولهٔ برفی به جرم ۱/۵۰kg با زاویهٔ ۳۴/۰° نسبت به افق با تندی اولیهٔ ۲۰/۰m/s، رو به بالا پرتاب شده است. (الف) انرژی جنبشی اولیهٔ آن چقدر است؟ (ب) هنگامی که گلولهٔ برف از نقطهٔ پرتاب به نقطه‌ای که در آنجا ارتفاعش بیشینه است می‌رسد، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلولهٔ برف- زمین چقدر تغییر می‌کند؟ (پ) این ارتفاع بیشینه چقدر است؟

حل: (الف)

$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱/۵ \times (۲۰)^۲ = ۳۰۰J$

(ب) در اوج، سرعت در راستای yها صفر می‌شود. یعنی انرژی جنبشی در اوج برابر است با

$K = \frac{۱}{۲}mv_x^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲\cos^۲\theta$

$K = \frac{۱}{۲} \times ۱/۵ \times ۴۰۰ \times (۰/۸۲)^۲ = ۲۰۶/۲J$

این تفاوت در انرژی جنبشی در لحظهٔ پرتاب و اوج برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی است.

$\Delta K = -\Delta U$

$\Delta U = -\Delta K = ۹۳/۸J$

(پ) $mgh = \Delta U \Rightarrow h = \frac{۹۳/۸}{۱/۵ \times ۹/۸} = ۶/۳۸m$

۹۶- برجسمی به جرم ۲۰kg نیروی پایستار $F = -۳/۰x - ۵/۰x^۲$ وارد شده که در آن F برحسب نیوتون و x برحسب متر است. انرژی پتانسیل وابسته به این نیرو را وقتی که جسم در $x = ۰$ قرار دارد برابر صفر در نظر بگیرید. (الف) وقتی که جسم در $x = ۲/۰m$ است، انرژی پتانسیل دستگاه وابسته به این نیرو چقدر است؟ (ب) اگر هنگامی که جسم در $x = ۵/۰m$ است، دارای سرعت ۴/۰m/s در جهت منفی محور x باشد، تندی آن هنگامی که از مبدأ عبور می‌کند چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل دستگاه وقتی که جسم در $x = ۰$ است برابر ۸/۰J- در نظر گرفته شود، پاسخهای (الف) و (ب) چه می‌شوند؟

حل: (الف)

$U(x) = -\int F(x)dx = -\int_۰^x (-۳x - ۵x^۲)dx = \frac{۳}{۲}x^۲ + \frac{۵}{۳}x^۳$

$U(۲) = \frac{۳}{۲} \times ۴ + \frac{۵}{۳} \times ۸ = ۱۹/۳۳J$

(ب) از پایستگی انرژی داریم

$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$

$U_f = ۰$

$K_f = \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۱۶ + \frac{۳}{۲} \times ۲۵ + \frac{۵}{۳} \times ۱۲۵ = ۴۰۵/۸J$

$\frac{۱}{۲}mv_f^۲ = ۳۷۵/۸J \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{۷۵۱/۶}{۲۰}} = ۶/۳۷\, m/s$

(پ) برای انرژی پتانسیل داریم:

$U(x) - U(۰) = -\int_۰^۲ (-۳x - ۵x^۲)dx = ۱۹/۲۳$

$U(x) = U(۰) + ۱۹/۲۳ = ۱۱/۳۳J$

ولی تندی تغییر نمی‌کند. چون مقدار ثابت از دو طرف رابطهٔ پایستگی انرژی حذف می‌شود.

۹۷- پرتابه‌ای به جرم ۹/۴kg به طور قائم رو به بالا شلیک شده است. در طی بالا رفتن پرتابه، نیروی کشش هوا انرژی مکانیکی دستگاه پرتابه- زمین را به اندازهٔ ۶۸/۰kJ کاهش می‌دهد. اگر نیروی کششی هوا قابل چشمپوشی باشد، پرتابه چقدر بالاتر می‌رود؟

حل: در حالت اول داریم:

$W_{f_k} = E_f - E_i \Rightarrow -۶۸kJ = mgh - E_i$

در حالت دوم داریم:

$E_i = E_f \Rightarrow E_i = mgh'$

تغییر ارتفاع را بدست می‌آوریم:

$-۶۸kJ = mgh - mgh' \Rightarrow mg(h'-h) = ۶۸kJ$

$\Delta h = h' - h = \frac{۶۸kJ}{۹/۸ \times ۹/۴} = ۷۳۸/۱۷m$

۹۸- یک وسیلهٔ فلزی توسط یک نیروی ۱۸۰ نیوتونی در مقابل لبهٔ چرخ یک ماشین سنباده برای تیز شدن نگهداشته شده است. بین لبهٔ چرخ و آن بخش از وسیله که تیز می‌شود اصطکاک وجود دارد. چرخ دارای شعاع ۲۰/۰cm است و با آهنگ ۲/۵۰rev/s می‌چرخد. ضریب اصطکاک جنبشی بین چرخ و وسیلهٔ فلزی برابر ۰/۳۲۰ است. انرژی با چه آهنگی از موتوری که چرخ را می‌چرخاند به انرژی گرمایی چرخ و وسیلهٔ فلزی، و انرژی جنبشی خرده فلزهایی که از وسیلهٔ فلزی پرتاب شده‌اند، تبدیل شده است؟

حل:

$P = f_k v \qquad v = ۲/۵$

سرعت خطی را می‌یابیم.

f فرکانس چرخش است.

$v = R\omega = R۲\pi f = ۰/۲ \times ۲\pi \times ۲/۵ = ۳/۱۴\, m/s$

نیروی اصطکاک را مشخص می‌کنیم

$f_k = \mu N = ۰/۳۲ \times ۱۸۰ = ۵۷/۶N$

$P = ۱۸۰/۸۶\, w$

جایگذاری می‌کنیم

۹۹- فنری با ثابت فنر ۳۲۰۰N/m در ابتدا چنان کشیده شده که انرژی پتانسیل کشسانی آن ۱/۴۴ J است. (برای فنر واهلیده

$U=0$ است.) اگر کشیدگی اولیه تغییر کند و به (الف) کشیدگی ۲/۰cm، (ب) فشردگی ۲/۰cm و (پ) فشردگی ۴/۰cm برسد، تغییر انرژی پتانسیل کشسانی ΔU چقدر می‌شود؟

حل: (الف) $U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}\times 3200\times(0.02)^2=0.64J$

$\Delta U=U_f-U_i=0.64-1.44=-0.8J$

(ب) $U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}3200(0.02)^2=0.64J$

$\Delta U=U_f-U_i=0.64-1.44=-0.8J$

(پ) $U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}3200(0.04)^2=2.56J$

$\Delta U=U_f-U_i=2.56-1.44=1.12J$

۱۰۰- فنر یک تفنگ فنری اسباب بازی دارای ثابت فنر ۷۰۰N/m است. برای شلیک گلوله، نخست فنر فشرده و سپس گلوله‌ای روی آن جاسازی می‌شود. آنگاه ماشهٔ تفنگ، فنر را آزاد می‌کند تا به گلولهٔ داخل لولهٔ تفنگ نیرو وارد آورد. وقتی تفنگ رو به بالا به اندازهٔ ۳۰° نسبت به افق کج شده باشد، گلوله‌ای به جرم ۷۵ g تا ارتفاع بیشینهٔ ۱/۸۳ m بالاتر از دهانهٔ تفنگ شلیک می‌شود. فرض کنید کشش هوای وارد بر گلوله ناچیز است. (الف) فنر با چه تندی گلوله را پرتاب کرده است؟ (ب) با فرض اینکه اصطکاک وارد بر گلوله از طرف لولهٔ تفنگ ناچیز باشد، فاصلهٔ فشردگی اولیهٔ فنر را به دست آورید.

حل: (الف) وقتی گلوله به اوج می‌رسد، سرعت آن v_y صفر می‌شود و بخشی از انرژی جنبشی اولیه به انرژی پتانسیل گرانش تبدیل می‌شود.

$K=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)$

از بقای انرژی استفاده می‌کنیم

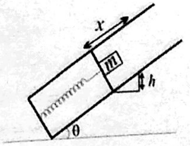
$E_i=E_f\Rightarrow K_i+U_i=K_f+U_f$

$\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)=\frac{1}{2}mv_x^2+mgh$

$v_y^2=2gh\Rightarrow v_y=\sqrt{19.6\times1.83}=6m/s$

$v_{0y}=v_0\sin\theta\Rightarrow v_0=\frac{v_{0y}}{\sin\theta}=\frac{6}{0.5}=12m/s$

(ب) انرژی جنبشی تماماً از انرژی ذخیره شده در فنر ایجاد می‌شود.



$E_i=E_f$

$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2+mgh$ $\quad h=x\sin\theta$

$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}gx\Rightarrow kx^2=mv^2+gx$

$kx^2-gx-mv^2=0\Rightarrow x=0.125m$

۱۰۱- بازیگر سیرکی به جرم ۶۰/۰ kg از بالای تیری به بلندی ۴/۰۰m، از حالت سکون رو به پایین تا کف صحنهٔ نمایش سُر می‌خورد. انرژی جنبشی بازیگر وقتی که به کف می‌رسد، در صورتی که نیروی اصطکاکی که میله بر بازیگر وارد می‌کند (الف) ناچیز باشد (که در آن صورت صدمه خواهد دید) و (ب) دارای بزرگی ۵۰۰N باشد، چقدر خواهد بود؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی داریم:

$E_i=E_f$

$mgh=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=60(9.8)(4)=2352J$

(ب) در این حالت نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهد.

$W_{f_k}=E_f-E_i\Rightarrow -500\times d=\frac{1}{2}mv^2-mgd$

$\frac{1}{2}mv^2=mgd-500d\Rightarrow K=-500(4)+60(4)(9.8)=352J$

۱۰۲- در سال ۱۹۸۱/۱۳۶۰ *دانیل گودوین*[1] با استفاده از چند مکنده و گیره‌های فلزی از دیوارهٔ خارجی ساختمانی به بلندی ۴۴۳ m در شیکاگو بالا رفت. (الف) جرم او را عددی تقریبی بگیرید و آنگاه محاسبه کنید که او مجبور بود چه مقدار انرژی بیومکانیکی (داخلی) را به انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه زمین- گودوین تبدیل کند تا خود را تا آن ارتفاع بالا ببرد؟ (ب) اگر او، به جای این کار، از پله‌های داخل ساختمان همین ارتفاع را با بالا می‌رفت، چقدر انرژی باید مصرف می‌کرد؟

حل: (الف) $U=mgh=70\times9.8\times443=303898J$

(ب) چون انرژی پتانسیل گرانشی فقط به جرم و جابه‌جایی عمودی بستگی دارد. جواب تغییری نمی‌کند.

۱۰۳- گلوله‌ای به جرم ۳۰g با سرعت افقی ۵۰۰m/s پس از طی مسافت ۱۲cm در داخل دیواری صلب، متوقف می‌شود. (الف) تغییر انرژی مکانیکی گلوله چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی متوسط وارد از دیوار که گلوله را متوقف می کند چقدر است؟

حل: (الف) $\Delta E=\Delta K=K_f-K_i=0-K_i=-\frac{1}{2}mv^2$

$\Delta K=-\frac{1}{2}\times30\times10^{-3}\times(500)^2=-3750J$

(ب) $W_{f_k}=E_f-E_i\Rightarrow -\bar{f}_k d=-E_i$

$\bar{f}_k=\frac{-3750}{-0.12}=31250N$

۱۰۴- مقاومت در مقابل حرکت یک اتومبیل عبارت است از اصطکاک جاده، که تقریباً مستقل از تندی است، و کشش هوا، که متناسب با توان دوم تندی است. برای اتومبیل مشخصی به وزن ۱۲۰۰۰N، نیروی مقاومت کل F با رابطهٔ $F=300+1.8v^2$ داده می‌شود که در آن F برحسب نیوتون و v برحسب متر بر ثانیه است. توان (برحسب اسب بخار) مورد

1. Daniel Goodwin

نیاز را برای این که وقتی تندی اتومبیل ۸۰km/h است شتاب آن ۰/۹۲m/s² باشد، محاسبه کنید.

حل: در این حالت برآیند نیروهای وارد بر ماشین، یعنی نیروی موتور و نیروی اصطکاک و نیروی کشش هوا به آن شتاب ۰/۹۲m/s² می‌دهد. نیروی موتور را می‌یابیم.

$F_{net}=ma$

F' نیروی موتور است.

$F'-F=ma\Rightarrow F'=ma+F$

$F'=\frac{12000}{9.8}\times0.92+300+1.8\left(\frac{80}{3.6}\right)^2=2315.33N$

$P=F'v=2315.32\times\frac{80}{3.6}=51446.64w$

۱۰۵- لوکوموتیوی با قابلیت توان ۱/۵MW می‌تواند به قطاری شتاب دهد و تندی آن را در مدت ۶/۰min از ۱۰m/s به ۲۵m/s برساند. (الف) جرم قطار را محاسبه کنید. (ب) تندی قطار و (پ) نیرویی را که به قطار در مدت ۶/۰min شتاب می‌دهد، برحسب تابعی از زمان (برحسب ثانیه) به دست آورید. (ت) مسافتی را که قطار در این بازهٔ زمانی طی کرده است، بیابید.

حل: (الف) از تعریف توان داریم:

$P=\frac{\Delta E}{\Delta t}$ $\quad \Delta E=\Delta k$

$P=\frac{\Delta K}{\Delta t}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)}{360}=P$

$\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=360\times P\Rightarrow m=\frac{2\times360\times1.5\times10^6}{625-100}$

$=2.06\times10^6$ kg

(ب) $\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=Pt\Rightarrow v^2-v_0^2=\frac{2pt}{m}$

$v^2=\frac{2pt}{m}+v_0^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2pt}{m}+v_0^2}=\sqrt{1.46t+100}$

(پ) $P=Fv\Rightarrow F=\frac{p}{v}=\frac{1.5\times10^6}{\sqrt{1.46t+100}}$

(ت) $v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=vdt=\sqrt{1.46t+100}dt$

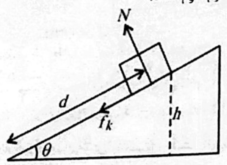
$x=\frac{1}{1.46}\frac{2}{3}[1.46t+100]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^t$

$\Rightarrow x=0.46\left([1.46t+100]^{\frac{3}{2}}-1000\right)$

با جایگذاری $t=360s$ به دست می‌آوریم $\quad x=6740m$

۱۰۶- قطعه‌ای به جرم ۵/۰kg با سرعت ۵/۰m/s به بالای سطح شیبداری که با افق زاویهٔ ۳۰° می‌سازد، پرتاب شده است. قطعه تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود، اگر (الف) این سطح بدون اصطکاک باشد و اگر (ب) ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و سطح ۰/۴۰ باشد؟ (پ) در قسمت (ب) افزایش انرژی گرمایی قطعه و سطح در حین بالا رفتن قطعه چقدر است؟ (ت) اگر قطعه سپس بر شیب با اصطکاک، رو به پایین بلغزد، تندی قطعه هنگامی که به نقطهٔ پرتاب آغازین می‌رسد چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم: d مسافتی است که روی سطح طی می‌کنند.



$E_i=E_f$

$\frac{1}{2}mv^2=mgh\Rightarrow\frac{1}{2}v^2=gh$

$h=\frac{v^2}{2g}=\frac{25}{19.6}=1.28m$

$d=\frac{h}{\sin\theta}=\frac{1.28}{0.5}=2.56m$

(ب) به دلیل اصطکاک می‌نویسیم:

$W_{f_k}=E_f-E_i\Rightarrow -f_kd=mgh-\frac{1}{2}mv^2$

$h=d\sin\theta$ $\quad f_k=\mu_k mg\cos\theta$

$-\mu_k mgd\cos\theta=mgd\sin\theta-\frac{1}{2}mv^2$

$\frac{1}{2}v^2=gd(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)\Rightarrow d=\frac{v^2}{2g[\sin\theta+\mu_k\cos\theta]}$

$d=\frac{25}{19.6[0.5+0.4\times0.86]}=1.51m$

(پ) افزایش انرژی گرمایی، با کار نیروی اصطکاک برابر است:

$Q=-f_hd=\mu_k mgd\cos\theta$

$Q=0.4\times5\times9.8\times1.51\times\cos(30)=25.45J$

(ت) در اینجا از تفاوت انرژی‌های جنبشی در ابتدای مسیر استفاده می‌کنیم. توجه می‌کنیم که اصطکاک در رفت و برگشت کار انجام می‌دهد.

$W_{f_k}=E_f-E_i\Rightarrow -2\mu_k mgd\cos\theta=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$

$v^2-v_0^2=-4\mu_k gd\cos\theta$

$v^2=v_0^2-4\mu_k gd\cos\theta$

$\Rightarrow v=\sqrt{25-4\times0.4\times9.8\times1.51\times\cos(30°)}=2.15m/s$

۱۰۷- قطعه‌ای به جرم ۲۰kg واقع بر سطحی افقی به یک فنر افقی با ثابت فنر $k=$ ۴/۰ kN/m متصل شده است. قطعه به سمت راست کشیده می‌شود، طوری که فنر به اندازهٔ ۱۰cm فراتر از طول واهلیده‌اش کش می‌آید و سپس قطعه از حالت سکون رها می‌شود. بزرگی نیروی اصطکاک بین قطعهٔ لغزان و سطح برابر ۸۰N است. (الف) انرژی جنبشی قطعه هنگامی که به اندازهٔ ۲/۰cm از نقطهٔ رها شدن حرکت کرده است، چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی قطعه هنگامی که برای نخستین بار از نقطهٔ واهلیدگی فنر می‌گذرد چقدر است؟ (پ) انرژی جنبشی بیشینه‌ای که قطعه در طی فاصلهٔ نقطهٔ رها شدن تا نقطهٔ واهلیدگی فنر به دست می‌آورد، چقدر است؟

حل: (الف)

$W_{f_k}=E_f-E_i$

$-f_kd=K_f+\frac{1}{2}k(x-d)^2-\frac{1}{2}kx^2$

$x=10\,cm$ $\quad d=2cm$

$-80\times0.02=K_f+\frac{1}{2}\times4\times10^3(0.08)^2-\frac{1}{2}\times4\times10^3(0.1)^2$

$-1.6=K_f+12.8-20\Rightarrow K_f=5.6J$

(ب) در نقطهٔ واهلیدگی، انرژی پتانسیل صفر است

$W_{f_k}=E_f-E_i$

$-f_kd=K_f-\frac{1}{2}kx^2$

$K_f=\frac{1}{2}\times4\times10^3(0.1)^2-80\times0.1\Rightarrow K_f=12J$

(پ) x_0 را طول کشیدگی اولیه در نظر می‌گیریم

$W_{f_k}=E_f-E_i$

$-f(x_0-x)=\frac{1}{2}kx^2+K-\frac{1}{2}kx_0^2$

$K=-f(x_0-x)-\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kx_0^2$

$\frac{dK}{dx}=0\Rightarrow +f-kx=0\Rightarrow x=\frac{f}{k}=\frac{80}{4000}=0.02m$

در $x=0.02m$ انرژی جنبشی بیشینه است. مقدار انرژی جنبشی در این نقطه را می‌یابیم.

$K=-80(0.1-0.02)-\frac{1}{2}4000(0.02)^2+\frac{1}{2}4000(0.1)^2$

$K=12.8J$

۱۰۸- مردی به جرم ۷۰٫۰ kg از پنجره‌ای بیرون می‌پرد و روی یک تور نجات از آتش که ۱۱٫۰m پایینتر از پنجره است، فرود می‌آید. وقتی تور نجات به اندازهٔ ۱٫۵۰m کش بیاید، مرد به توقف لحظه‌ای می‌رسد. با فرض این که انرژی مکانیکی در طی این فرایند پایسته و رفتار تور نجات مشابه یک فنر آرمانی باشد، انرژی پتانسیل کشسانی را هنگامی که تور به اندازهٔ ۱٫۵۰m کشیده شده است، پیدا کنید.

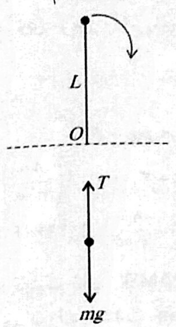
حل: از پایستگی انرژی داریم:

$E_i=E_f\Rightarrow mg(h+y)=\frac{1}{2}ky^2$

$\frac{1}{2}ky^2=70\times9.8(11+1.5)=8575J$

۱۰۹- برای ساختن یک آونگ، به یک سر میله‌ای به طول ۰٫۶۲m و جرم ناچیز، گلوله‌ای به جرم ۰٫۰۹۲kg متصل شده و سر دیگر میله در نقطه‌ای لولا شده است. میله تا وضعیتی که به طور قائم رو به بالا قرار گیرد چرخانده و سپس از حالت سکون رها می‌شود تا حول محل لولا رو به پایین تاب بخورد. وقتی که گلوله به پایینترین نقطه می‌رسد (الف) تندی آن و (ب) کشش میله چقدر است؟ سپس میله تا وضعیت افقی چرخانده و دوباره از حالت سکون رها می‌شود. (پ) در چه زاویه‌ای نسبت به قائم کشش میله برابر با وزن گلوله است؟ (ت) اگر جرم گلوله افزایش داده شود، آیا پاسخ بخش (پ) افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر باقی می‌ماند؟ SSM

حل: (الف) از پایستگی انرژی داریم:



$E_i=E_f$

$mgL=\frac{1}{2}mv^2-mgL$

$\frac{1}{2}mv^2=2mgL\Rightarrow v^2=4gL$

$v=\sqrt{4\times9.8\times0.62}=4.93\,m/s$

(ب) در پایین‌ترین نقطه داریم:

$T-mg=m\frac{v^2}{L}\Rightarrow T=mg+m\frac{v^2}{L}$

مقدار $m\frac{v^2}{L}$ را از الف جایگذاری می‌کنیم

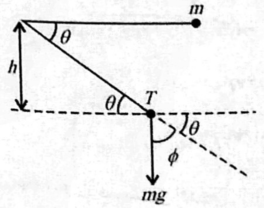
$T=mg+4mg\Rightarrow T=5mg$

$T=5\times0.092\times9.8=4.508N$

(پ) ابتدا زاویه را نسبت به افق می‌سنجیم. سپس در انتها جواب را به قائم تبدیل می‌کنیم.

$T-mg\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=m\frac{v^2}{L}$

$T-mg\sin\theta=m\frac{v^2}{L}$



$T=mg\sin\theta+m\frac{v^2}{L}$

مقدار $m\frac{v^2}{L}$ را با پایستگی انرژی می‌یابیم.

$E_i=E_f\Rightarrow 0=\frac{1}{2}mv^2-mgh$

$h=L\sin\theta$

$mgL\sin\theta=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow m\frac{v^2}{L}=2mg\sin\theta$

جایگذاری می‌کنیم

$T=mg\sin\theta+2mg\sin\theta\Rightarrow T=3mg\sin\theta$

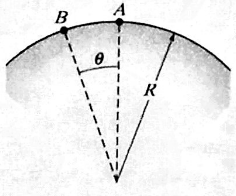
$T=mg$

$mg=3mg\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos\phi=\left(\frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow\phi=70.53^\circ$

(ت) ملاحظه می‌شود، جواب‌ها به جرم بستگی ندارند.

۱۱۰- اسکی بازی به وزن ۶۰۰N از روی تپهٔ دایره‌ای شکل بدون اصطکاکی به شعاع $R=20m$ عبور می‌کند (شکل ۸-۶۸). فرض کنید اثرهای مقاومت هوا روی اسکی باز ناچیز باشد. وقتی که او به نقطهٔ B در زاویهٔ $\theta=20^\circ$ می‌رسد، تندی او برابر با ۸٫۰m/s است. (الف) اگر او بدون استفاده از چوبهای اسکی حرکت کند، تندیش در نوک تپه (نقطهٔ A) چقدر است؟ (ب) تندی کمینه‌ای که او باید در نقطهٔ B داشته باشد تا باز به نوک تپه برسد چقدر است؟ (پ) اگر وزن اسکی باز ۷۰۰N باشد، آیا پاسخهای دو پرسش بالا، افزایش می‌یابد یا کاهش یا بدون تغییر می‌ماند؟



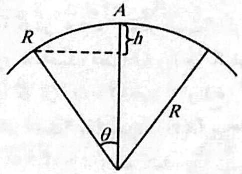
شکل ۸-۶۸ مسئلهٔ ۱۱۰

حل: (الف) از بقای انرژی استفاده می‌کنیم

$E_i=E_f$

$\frac{1}{2}mv_i^2+mgh_i=\frac{1}{2}mv_f^2+mgh_f$

$\frac{1}{2}mv_f^2=\frac{1}{2}mv_i^2-mgh$



که در آن $h=h_f-h_i$ از روی شکل دیده می‌شود:

$h_f-h_i=R-R\cos\theta=R(1-\cos\theta)$

$v_f^2=v_i^2-2gR(1-\cos\theta)$

$v_f=\sqrt{64-19.6\times20(1-\cos(20^\circ))}=6.35\,m/s$

(ب) تندی کمینه برای زمانی است که اسکی باز به نقطهٔ A برسد و ساکن بماند.

$E_i=E_f\Rightarrow\frac{1}{2}mv_i^2+mgh_i=mgh_f$

$v_i^2=2g(h_f-h_i)\Rightarrow v_i^2=2gR(1-\cos\theta)$

$v_i=\sqrt{19.6\times20(1-\cos(20^\circ))}=4.86\,m/s$

(پ) چون جرم‌ها از طرفین حذف می‌شوند، جواب نهایی به جرم بستگی ندارد.

۱۱۱- گلوله‌ای به جرم ۵۰g با سرعت اولیهٔ ۸٫۰m/s با زاویهٔ ۳۰° بالای افق از پنجره‌ای پرتاب شده است. با استفاده از روشهای انرژی موارد زیر را تعیین کنید: (الف) انرژی جنبشی گلوله در اوج پرواز و (ب) تندی گلوله هنگامی که ۳٫۰m پایینتر از پنجره است. آیا پاسخ (ب) بستگی به (پ) جرم گلوله یا (ت) زاویهٔ پرتاب دارد؟ SSM

حل: (الف) در نقطهٔ اوج، سرعت عمودی صفر است.

$K=\frac{1}{2}m(v^2)=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)$

در اوج داریم:

$K=\frac{1}{2}m(v_x^2)=\frac{1}{2}mv^2\cos^2\theta=\frac{1}{2}\times50\times10^{-3}\times64\times(0.86)^2$

$K=1.18J$

(ب) از پایستگی انرژی داریم:

$E_i=E_f\Rightarrow\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}mv_f^2-mgh$

$u=0$ را سطح پرتاب گرفته‌ایم.

$v_f^2=v_i^2+2gh$

$v_f=\sqrt{64+19.6\times3}=11.08\,m/s$

(پ) جرمها حذف می‌شوند، پس جواب به جرم بستگی ندارد.

(ت) چون با تندی‌ها کار داریم، زاویه مطرح نمی‌شود.

۱۱۲- یک شیرجه روندهٔ هوایی به جرم ۶۸kg با تندی حد ثابت ۵۹ m/s سقوط می‌کند. (الف) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه شیرجه رونده- زمین با چه آهنگی کاهش پیدا می‌کند؟ (ب) انرژی مکانیکی دستگاه با چه آهنگی کاهش می‌یابد؟

حل: (الف) علامت منفی به دلیل آن است که سرعت رو به پایین است.

$U=mgy$

$\frac{dU}{dt}=mg\frac{dy}{dt}=-mgv_y$

$\frac{dU}{dt}=-68\times9.8\times59=-39317.6w$

(ب) چون انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند، آهنگ کاهش انرژی مکانیکی، همان آهنگ کاهش انرژی پتانسیل است.

$\frac{dE}{dt}=\frac{dU}{dt}=-mgv_y=-39317.6w$

۱۱۳- رودخانه‌ای ۱۵m در یک شیب تند پایین می‌آید. تندی آب در لحظهٔ ورود به شیب برابر ۳٫۲m/s و در لحظهٔ خروج از آن ۱۳m/s است. در حین پایین آمدن، چه درصدی از انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه آب- زمین به انرژی جنبشی تبدیل شده است؟ (*راهنمایی*: پایین آمدن، مثلاً، ۱۰kg آب را در نظر بگیرید.)

حل: تغییر انرژی جنبشی برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}m((13)^2 - (3/2)^2)$$
$$= 79/38\,m$$

تغییر انرژی پتانسیل برابر است با

$$\Delta U = U_f - U_i = 0 - U_i = -mgh_i = -9/8 \times 15\,m = -147\,m$$

نسبت را می‌یابیم:

$$\frac{|\Delta K|}{|\Delta U|} = \frac{79/38\,m}{147\,m} = 0/54$$

یعنی بقیهٔ انرژی در اثر اصطکاک از بین می‌رود.

۱۱۴- بزرگی نیروی گرانشی میان دو ذره، یکی به جرم m_1 و دیگری به جرم m_2 با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2}$$

که در آن G مقداری ثابت و x فاصلهٔ میان دو ذره است. (الف) تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به نیرو را به دست آورید. فرض کنید برای x مثبت، وقتی $x \to \infty$ آنگاه $U(x) \to 0$. (ب) برای افزایش فاصلهٔ جدایی دو ذره از $x = x_1$ به $x = x_1 + d$، چقدر کار باید انجام گیرد؟

حل: **(الف)** نیروی گرانشی بین دو ذره جاذبه است، بنابراین صورت برداری آن چنین است:

$$\vec{F}(x) = -G\frac{m_1 m_2}{x^2}\hat{x}$$

$\hat{x}$ بردار یکه در راستای محور x است.

$$\overrightarrow{dx} = d_x\hat{x}$$
$$U(x) = -\int \vec{F}(x)\cdot\overrightarrow{dx}$$
$$= \int_{\infty}^{x} G\frac{m_1 m_2}{x^2}dx = -G\frac{m_1 m_2}{x}$$

(ب)

$$W = \int F(x)dx = \int_{x_1}^{x_1+d} G\frac{m_1 m_2}{x^2}dx = -G\frac{m_1 m_2}{x}\Big|_{x_1}^{x_1+d}$$
$$W = -Gm_1m_2\left[\frac{1}{x_2+d} - \frac{1}{x_1}\right] = Gm_1m_2\left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1+d}\right]$$
$$W = Gm_1m_2\left[\frac{x_1+d-x_1}{x_1(x_1+d)}\right] = Gm_1m_2\frac{d}{x_1(x_1+d)}$$

۱۱۵- به طور تقریبی در هر ثانیه $5/5\times10^6$ kg آب از بالای آبشار نیاگارا به بلندی ۵۰m به پایین می‌ریزد. (الف) کاهش انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه آب- زمین در هر ثانیه چقدر است؟ (ب) اگر تمام این انرژی بتواند به انرژی الکتریکی تبدیل شود (که البته غیر ممکن است)، انرژی الکتریکی با چه آهنگی تولید می‌شود؟ (جرم $1m^3$ آب برابر ۱۰۰۰kg است.) (پ) اگر این انرژی الکتریکی به قیمت ۱ سنت (cent) به ازای هر کیلو وات- ساعت (kW.h) فروخته شود، در آمد سالیانه حاصل از فروش آن چقدر است؟

حل: **(الف)** $2/7\times10^9$ J

$$U = mgh = 5/5\times10^6 \times 9/8 \times 50 = 2/7\times10^9\ J$$

در ثانیه این مقدار از انرژی کاسته می‌شود.

(ب)

$$P = \frac{U}{t} = \frac{2695\times10^6}{1} = 2/7\times10^9\ W$$

(پ) یک سال تقریباً $3/15\times10^7$ s است. پس کل توان تولیدی در یک سال برابر است با

$$P_{کل} = 2/7\times10^9 \times 3/15\times10^7 = 8/5\times10^{16}\ W$$
$$P_{کل} = \frac{8/5\times10^{16}}{10^3\times3600}kW\cdot h = 2/35\times10^{10}\ kW\cdot h$$
$$قیمت = 2/35\times10^{10}\ kW\cdot h = 2/35\times10^{10}\ cent$$

۱۱۶- اتومبیلی به جرم ۱۵۰۰kg روی یک جادهٔ افقی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و در مدت ۳۰s به تندی ۷۲km/h می‌رسد. (الف) انرژی جنبشی اتومبیل در پایان ۳۰s چقدر است؟ (ب) توان متوسط مورد نیاز اتومبیل در حین این بازهٔ زمانی ۳۰ ثانیه‌ای چقدر است؟ (پ) توان لحظه‌ای اتومبیل در پایان این بازهٔ زمانی ۳۰ ثانیه‌ای، با فرض آنکه شتاب ثابت باشد، چقدر است؟

حل: **(الف)**

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times1500\left(\frac{72}{3/6}\right)^2 = 3\times10^5\ J$$

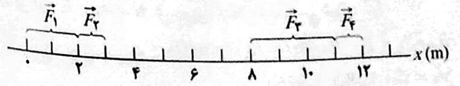
(ب)

$$\overline{P} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{3\times10^5}{30} = 10^4\ W$$

(پ)

$$P = Fv$$
$$F = ma$$
$$a = \frac{v}{t} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}m/s^2$$
$$F = 1500\times\frac{2}{3} = 1000\ N$$
$$P = 1000\times20 = 2\times10^4\ W$$

۱۱۷- ذره‌ای می‌تواند فقط در امتداد محور x حرکت کند، که در آنجا نیروهای پایستاری بر آن وارد می‌شوند (شکل ۸-۶۹ و جدول زیر). ذره در $x = 5/00m$ با انرژی جنبشی $K = 14/0J$ و انرژی پتانسیل $U = 0$ رها شده است. اگر حرکت ذره در جهت منفی محور x باشد، (الف) K و (ب) U در $x = 2/00m$، و (پ) U و (ت) K در $x = 0$ چقدر است؟ اگر حرکت ذره در جهت مثبت محور x باشد، (ث) U و (ج) K در $x = 11/0m$، و (چ) U و (ح) K در $x = 12/0m$، و (خ) U و (د) K در $x = 13/0m$ چقدر است؟ (ذ) نمودار $U(x)$ برحسب x را برای گسترهٔ $x = 0$ تا $x = 13/0m$ رسم کنید.



شکل ۸-۶۹ مسئلهٔ ۱۱۷

دفعهٔ بعد، ذره از حالت سکون و در $x = 0$ رها می‌شود. (ر) انرژی جنبشی آن در $x = 5/0m$ و (ز) مکان مثبت بیشینهٔ x_{max} که به آن می‌رسد، چقدر است؟ (ژ) پس از آنکه ذره به x_{max} برسد، چه می‌کند؟

گستره	نیرو
۰ تا ۲/۰۰m	$\vec{F}_1 = +(3/00N)\hat{i}$
۲/۰۰m تا ۳/۰۰m	$\vec{F}_2 = +(5/00N)\hat{i}$
۳/۰۰m تا ۸/۰۰m	$F = 0$
۸/۰۰m تا ۱۱/۰m	$\vec{F}_3 = -(4/00N)\hat{i}$
۱۱/۰m تا ۱۲/۰m	$\vec{F}_4 = -(1/00N)\hat{i}$
۱۲/۰m تا ۱۵/۰m	$F = 0$

حل:

(الف) انرژی پتانسیل را با رابطهٔ $U(x) = -\int F(x)dx$ در هر کدام از بازه‌ها بدست می‌آوریم:

چون نیروها پایستار هستند. انرژی ثابت می‌ماند.

$$E = K + U = 14 + 0 = 14J$$

(الف)

$$U = -\int F(x)dx = -\int_5^3 0\,dx - \int_3^2 5dx = -5x\Big|_3^2$$
$$= -5(2-3) = 5J$$

(ب)

$$E = K + U \Rightarrow 14 = k + 5 \Rightarrow k = 9J$$

(پ)

$$U = -\int F(x)dx = -\int_5^3 0\,dx - \int_3^2 5dx - \int_2^0 3dx$$
$$U = 0 - 5(2-3) - 3(0-2) = 5 + 6 = 11J$$

(ت)

$$E = K + U \Rightarrow k = E - u = 14 - 11 = 3J$$

(ث)

$$U = -\int F(x)dx = -\int_5^8 0\,dx - \int_8^{11}(-4)dx = 4x\Big|_8^{11}$$
$$= 4(11-8) = 12J$$

(ج)

$$E = K + U \Rightarrow K = E - U = 14J - 12J = 2J$$

(چ)

$$U = -\int F(x)dx = -\int_5^8 0\,dx - \int_8^{11}(-4)dx - \int_{11}^{12}(-1)dx$$
$$U = 0 + 4(11-8) + 1(12-11) = 12 + 1 = 13J$$

(ح)

$$E = K + U \Rightarrow K = E - U = 14 - 13 = 1J$$

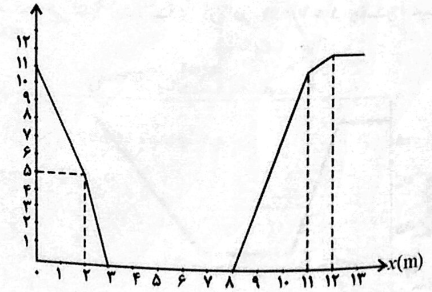
(خ)

$$U = -\int F(x)dx = -\int_5^8(0)dx - \int_8^{11}(-4)dx - \int_{11}^{12}(-1)dx - \int_{12}^{13}(0)dx$$
$$U = 4(11-8) + 1(12-11) = 13J$$

(د)

$$E = K + U \Rightarrow K = E - U = 14 - 13 = 1J$$

(ذ)



۱۱۸- در آرایش نیروهای مسئله ۱۱۷، جسمی به جرم ۲/۰۰kg با سرعت اولیهٔ ۳/۴۵m/s در جهت منفی محور x از $x = 5/00m$ رها شده است. (الف) اگر جسم بتواند به $x = 0m$ برسد، تندی جسم در آنجا چقدر است؟ و اگر نتواند برسد، نقطهٔ برگشت چیست؟ حال فرض کنید، جسم هنگامی که در $x = 5/00m$ است در جهت مثبت محور x با تندی ۳/۴۵m/s رها شود. (ب) اگر جسم بتواند به $x = 13/0m$ برسد، تندی جسم در آنجا چقدر است؟ و اگر نتواند برسد، نقطهٔ برگشت چیست؟

حل: **(الف)** از مسئلهٔ قبل کمک می‌گیریم:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times2\times(3/45)^2 = 11/9J$$

انرژی کل ذره ۱۱/۹ J است.

$$E_i = E_f \Rightarrow E_i = 11/9J$$
$$E_f = K_f + U_f$$
$$U_f = -\int_5^3(0)dx - \int_3^2(5)dx - \int_2^0(3)dx$$
$$= -5(2-3) - 3(0-2) = 11J$$
$$K_f = E - U_f = 11/9 - 11 = 0/9J$$

سرعت در جهت منفی محور xها

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = K_f \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\times0/9}{2}} = 0/94m/s$$

(ب) مانند قسمت الف

$$E_i = 11/9J$$
$$U = -\int_5^8(0)dx - \int_8^{11}(-4)dx - \int_{11}^{12}(-1)dx - \int_{12}^{13}(0)dx = +13J$$
$$K_f = E_f - U_f = 11/9 - 13 = -1/1J$$

چون انرژی جنبشی منفی می‌شود. پس ذره به $x = 13$ نمی‌رسد. با محاسبهٔ مشابه دیده می‌شود ذره به $x = 11m$ هم نمی‌رسد. در نقطهٔ برگشت $K_f = 0$ است.

$$K_f = 0 \Rightarrow U_f = E_f$$
$$U_f = -\int_5^8(0)dx - \int_8^x(-4)dx$$
$$U_f = 4(x-8) = 4x - 32$$
$$4x - 32 = 11/9 \Rightarrow 4x = 43/9 \Rightarrow x = 10/97m$$

۱۱۹- در نوعی بازی، قرص بازی دارای جرم ۰/۴۲kg و در ابتدا ساکن است. بازیکنی توسط یک چوب، تندی آن را با شتاب ثابتی تا ۴/۲m/s افزایش می‌دهد. این شتاب در طی مسافت ۲/۰m به وجود می‌آید و در انتهای آن، تماس چوب با قرص قطع می‌شود. سپس قرص پیش از متوقف شدن، ۱۲m دیگر می‌لغزد. فرض کنید صفحهٔ بازی مسطح باشد و نیروی اصطکاک ثابتی بر قرص وارد شود. افزایش انرژی گرمایی دستگاه قرص- صفحهٔ بازی (الف) برای آن ۱۲m اضافی و (ب) کل مسافت ۱۴m چقدر است؟ (پ) چوب چقدر کار روی قرص انجام می‌دهد؟ SSM

حل: **(الف)** این مقدار افزایش انرژی برابر است با کار نیروی اصطکاک

$$W_{f_k} = E_f - E_i = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$W_{f_k} = -\frac{1}{2}\times 0/42\times(4/2)^2 = -3/7\,J$

انرژی گرمایی ۳/۷J افزایش می‌یابد.

(ب) کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک، برابر است با کل انرژی تلف شده در ۱۴m ابتدا نیروی اصطکاک را از قسمت الف می‌یابیم.

$W_{f_k} = -f_k d = -3/7\,J \Rightarrow f_k = \frac{3/7}{12} = 0/308\,N$

در ۱۴m $W_{f_k} = -f_k d = -0/308\times 14 = -4/312\,J$

(پ) ابتدا نیروی وارد از چوب را می‌یابیم:

$F_{net} = ma \Rightarrow T - f_k = ma$

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow a = \frac{v^2}{2\Delta x} = \frac{(4/2)^2}{2\times 2} = 4/41\,m/s^2$

$T = f_k + ma = 0/308 + 4/41 = 4/718\,N$

کار نیروی T برابر است با

$W_T = Td = 4/718\times 2 = 9/436\,J$

۱۲۰- در حالی که یک نیروی خارجی بر ذره‌ای وارد می‌شود، ذره را در امتداد محور x نخست رو به بیرون، از $x=1/0m$ به $x=4/0m$ می‌بریم و سپس رو به داخل به $x=1/0m$ باز می‌گردانیم. جهت نیرو در امتداد محور x است و مؤلفهٔ x آن می‌تواند مقدارهای مختلفی برای حرکت در مسیر رفت و حرکت در مسیر برگشت داشته باشد. در اینجا، این مقدارها (برحسب نیوتون) برای چهار وضعیت که در آنجا x برحسب متر است، داده شده است:

	رو به خارج	رو به داخل
(الف)	$+3/0$	$-3/0$
(ب)	$+5/0$	$+5/0$
(پ)	$+2/0x$	$-2/0x$
(ت)	$+3/0x^2$	$+3/0x^2$

برای هر چهار وضعیت، کار خالص انجام شده توسط نیروی خارجی بر ذره‌ای که مسیری رفت و برگشت را طی کرده است، پیدا کنید. (ث) برای کدام وضعیت، در صورت وجود، نیروی خارجی پایستار است؟

حل: (الف)

$W = \int F(x)dx$

کار در رفت $W_1 = \int F(x)dx = \int_1^4 3dx = 3(4-1) = 9J$

کار در برگشت $W_2 = \int F(x)dx = \int_4^1 (-3)dx = -3(1-4) = 9J$

کار کل: $W = W_1 + W_2 = 9+9 = 18J$

(ب)

در رفت $W_1 = \int F(x)dx = \int_1^4 (5)dx = 5(4-1) = 15\,J$

در برگشت $W_2 = \int F(x)dx = \int_4^1 (5)dx = 5(1-4) = -15\,J$

$W = W_1 + W_2 = 0$

(پ)

در رفت $W_1 = \int F(x)dx = \int_1^4 (2x)dx = x^2\Big|_1^4 = (16-1) = 15J$

در برگشت $W_2 = \int F(x)dx = \int_4^1 (-2x)dx = -x^2\Big|_4^1 = -(1-16) = 15J$

$W = W_1 + W_2 = 30\,J$

(ت)

در رفت $W_1 = \int F(x)dx = \int_1^4 3x^2dx = x^3\Big|_1^4 = (64-1) = 63\,J$

در برگشت $W_2 = \int F(x)dx = \int_4^1 3x^2dx = x^3\Big|_4^1 = (1-64) = -63\,J$

$W = W_1 + W_2 = 0$

(ث) توجه داریم که برای یک نیروی پایستار می‌توانیم بنویسیم:

$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \Rightarrow dU(x) = \int F(x)dx$

$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx$

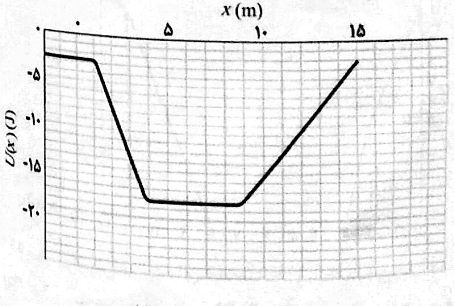
در یک رفت و برگشت داریم:

$U(x_0) - U(x_0) = -\oint_{x_0}^{x_0} F(x)dx = 0$

یعنی کار نیروی پایستار در یک رفت و برگشت برابر صفر است.

از بین موارد الف تا ت فقط مورد ب و ت دارای این شرط هستند.

۱۲۱- نیروی پایستار $F(x)$ بر ذره‌ای به جرم ۲/۰kg که در امتداد محور x حرکت می‌کند، وارد می‌شود. انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به $F(x)$ در شکل ۸-۷۰ رسم شده است. وقتی ذره در $x=2/0m$ قرار دارد، سرعت آن ‎-1/5m/s‎ است. (الف) بزرگی و(ب) جهت $F(x)$ در این مکان چیست؟ ذره میان چه مکانهایی در (پ) طرف چپ و (ت) طرف راست حرکت می‌کند؟ (ث) تندی ذره در $x=7/0m$ چقدر است؟ SSM



شکل ۸-۷۰ مسئلهٔ ۱۲۱

حل: (الف) $F(x) = \frac{-dU(x)}{dx} = -\frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = -\frac{-14}{3} = 4/67N$

(ب) نیرو در جهت مثبت محور xهاست.

(پ)

$E_i = E_f$

$\frac{1}{2}mv_i^2 + U_i(x) = \frac{1}{2}mv_f^2 + U_f(x)$

برای توقف داریم $v_f = 0$

$U_f(x) = \frac{1}{2}mv_i^2 + U_i(x)$

$U_f(x) = \frac{1}{2}\times 2\times(-1/5)^2 + (-7) = -4/75\,J$

این مقدار $U_f(x)$ متناظر با تقریباً $x=1$ در چپ و $x=14$ در راست است.

(ت) $E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + U_i(x) = \frac{1}{2}mv_f^2 + U_f(x)$

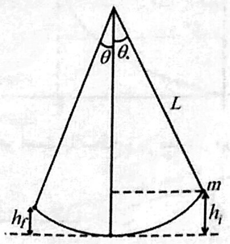
$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + U_i(x) - U_f(x)$

$\frac{1}{2}\times 2\times v_f^2 = \frac{1}{2}\times 2\times(-1/5)^2 + (-7) - (-17) = 12/25$

$v_f = 3/5\,m/s$

۱۲۲- برای ساختن یک آونگ، گلوله‌ای به جرم ۳۰۰g به یک انتهای ریسمانی به طول ۱/۴m که جرم آن قابل چشم‌پوشی است، متصل شده است (سر دیگر ریسمان در جایی ثابت شده است). گلوله به اندازهٔ ۳۰° نسبت به خط قائم به یک سو کشیده و سپس (بی آنکه ریسمان خم شود) از حالت سکون رها می‌شود. مطلوب است (الف) تندی گلوله هنگامی که ریسمان با امتداد قائم زاویه ۲۰/۰° می‌سازد و (ب) تندی بیشینهٔ گلوله. (پ) هنگامی که تندی گلوله $\frac{1}{3}$ مقدار بیشینهٔ خود است، طناب چه زاویه‌ای با امتداد قائم می‌سازد؟

حل: (الف) تراز انرژی پتانسیل را در L در نظر می‌گیریم



$E_i = E_f \Rightarrow mgh_i = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_f$

$h_i = L(1-\cos\theta_0)$

$h_f = L(1-\cos\theta)$

$\frac{1}{2}v^2 = g(h_i - h_f) = g(L(1-\cos\theta_0) - L(1-\cos\theta))$

$v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)$

$\Rightarrow v = \sqrt{19/6\times 1/4(\cos(20°) - \cos(30°))}$

$v = 1/48\,m/s$

(ب) تندی بیشینه در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر است. چون پتانسیل آنجا صفر است.

$E_i = E_f \Rightarrow mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2$

$v^2 = 2gL(1-\cos\theta_0) \Rightarrow v + \sqrt{19/6\times 1/4(1-0/80)}$

$= 3/84\,m/s$

(پ) $v_{max} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$ $\quad v = \frac{1}{3}v_{max}$

$E_i = E_f \Rightarrow mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1-\cos\theta)$

با جایگذاری بدست می‌آوریم:

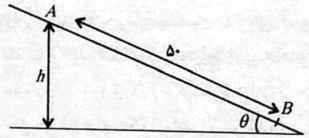
$1-\cos\theta_0 = \frac{1}{9}(1-\cos\theta_0) + 1 - \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1+8\cos\theta_0}{9} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1+8\times 0/89}{9} = 0/88$

$\theta = 27/67°$

۱۲۳- اتومبیلی به جرم ۱۵۰۰kg با تندی ۳۰km/h در جاده‌ای با شیب ۵/۰° رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. موتور اتومبیل خاموش می‌شود و تنها نیروهای وارد بر اتومبیل، نیروی اصطکاک خالص وارد از جاده و نیروی گرانشی است. پس از آنکه اتومبیل ۵۰m در امتداد جاده حرکت کند، تندی آن ۴۰km/h است. (الف) انرژی مکانیکی اتومبیل بر اثر نیروی اصطکاک خالص وارد بر آن چقدر کاهش یافته است؟ (ب) بزرگی این نیروی اصطکاک خالص چقدر است؟ SSM

حل: (الف)



$W_{f_k} = E_f - E_i$

$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ $\quad E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh$

$W_{f_k} = \frac{1}{2}\times 1500\left(\frac{40}{3/6}\right)^2 - \frac{1}{2}\times 1500\times\left(\frac{30}{3/6}\right)^2 - 1500\times 9/8\times 50\sin(5°)$

$W_{f_k} = -25629/17\,J$

(ب) $W_{f_k} = -f_k d \Rightarrow f_k = \frac{w_{fk}}{d} = 512/58\,N$

۱۲۴- در یک نمایش سیرک، دلقکی به جرم ۶۰kg از لولهٔ توپی با سرعت اولیهٔ ۱۶m/s با زاویهٔ نامشخصی نسبت به افق شلیک می‌شود. اندکی بعد، دلقک روی یک توری به فاصلهٔ قائم ۳/۹m بالای مکان اولیه‌اش فرود می‌آید. هنگامی که دلقک بر روی تور فرود می‌آید، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ کشش هوا را نادیده بگیرید.

حل: از بقای انرژی استفاده می‌کنیم

$E_i = E_f \Rightarrow U_i + K_i = K_f + U_f$

$K_f = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + mg(h_i - h_f)$

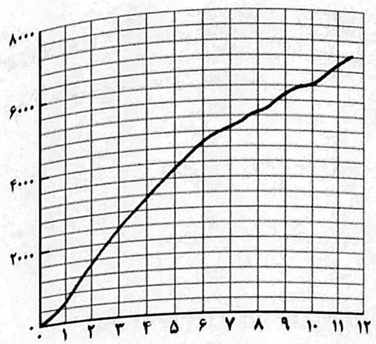
$\Rightarrow K_f = \frac{۱}{۲}\times ۶۰\times(۱۶)^۲ - ۶۰\times ۹/۸\times ۳/۹$

$K_f = ۵۳۸۶/۸\text{J}$

۱۲۵- بیشینهٔ نیرویی که شما با آن می‌توانید یک شیء را با یکی از دندانهای آسیای خود بفشارید در حدود ۷۵۰N است. فرض کنید وقتی شما نوعی سقّز[1] را با دندانهایتان فشار می‌دهید، سقّز مثل فنری با ثابت $۲/۵\times ۱۰^۵$ N/m مقاومت کند. مطلوب است (الف) فاصله‌ای که سقّز توسط دندانهای شما فشرده می‌شود و (ب) کاری که توسط دندانهای شما در حین فشردن صورت می‌پذیرد. (پ) بزرگی نیروی وارد بر سقّز را برحسب فاصلهٔ فشردگی رسم کنید. (ت) اگر یک انرژی پتانسیل وابسته به این فشردگی وجود داشته باشد، آن را برحسب فاصلهٔ فشردگی رسم کنید.

در سال ۱۹۹۰/۱۳۷۰، اسکلت لگن نوعی دایناسور موسوم به *سه شاخ*[2] کشف شد که روی آن علائم گاز گرفتگی موجود بود. شکل گاز گرفتگی به گونه‌ای بود که حدس زده شد توسط نوعی دایناسور موسوم به *دایناسور گوشت خوار رکس*[3] ایجاد شده است. برای بررسی این موضوع، پژوهشگران نمونه‌ای از دندانهای دایناسور *گوشت خوار* را از برنز و آلومینیوم ساختند و سپس با استفاده از یک دستگاه فشار هیدرولیکی این دندانهای مصنوعی را برای ایجاد حفره‌ای به همان اندازه‌ای که روی لگن *دایناسور سه شاخ* دیده شده بود، به‌تدریج روی استخوان گاوی فشردند. نموداری از نیروی لازم برای نفوذ دندان برحسب عمق نفوذ در شکل ۸-۷۱ برای یک آزمایش رسم شده است؛ نیروی مورد نیاز با افزایش عمق حفره افزایش یافته است، چون وقتی دندانهای مخروطی استخوان را سوراخ کنند، تماس دندانها با استخوان بیشتر می‌شود. (ث) در چنین مقدار نفوذی، چه مقدار کار توسط دستگاه فشار هیدرولیکی - و احتمالاً توسط *دایناسور گوشت‌خوار* - انجام شده است؟ (ج) آیا انرژی پتانسیلی وابسته به این نفوذ وجود دارد؟ (بزرگ بودن نیروی گاز و مقدار انرژی صرف شده توسط *دایناسور گوشت‌خوار* بنابر استدلال برخی پژوهشگران نشان دهندهٔ این است که *دایناسور گوشت خوار* حیوانی درنده بوده است نه لاشخور)

1. Licorice
2. Triceratops
3 Trynnosaurus rex



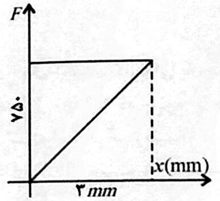
شکل ۸-۷۱ مسئلهٔ ۱۲۵

حل: (الف) $F = kx \Rightarrow x = \frac{F}{k} = \frac{۷۵۰}{۲/۵\times ۱۰۵} = ۳\times ۱۰^{-۳}\ \text{m}$

(ب) کار در سقّز ذخیره می‌شود.

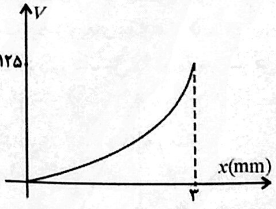
$W = \frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۲/۵\times ۱۰^۵\ (۳\times ۱۰^{-۳})^۲ = ۱/۱۲۵\text{J}$

(پ)



(ت)

$U = \frac{۱}{۲}kx^۲$



(ث) این کار برابر است با سطح زیر نمودار نیرو

$W = \int F(x)dx$

این سطح برابر ۱۱۵ مستطیل است.

$W_{\text{کل}} = ۱۱۵\times ۴۰۰\times ۰/۰۰۱ = ۴۶\text{J}$

(ج) این نیرو مانند یک نیروی پایستار مثلاً فنر نیست، پس برای آن نمی‌توان انرژی پتانسیل در نظر گرفت

۱۲۶- یک آتش‌نشان به جرم ۷۰ kg از بالای تیر قائمی به بلندی ۴/۳m رو به پایین سُر می‌خورد. (الف) اگر آتش‌نشان تیر را به طور سستی بغل کند، به گونه‌ای که نیروی اصطکاکی که تیر بر او وارد می‌کند ناچیز باشد، تندی او درست پیش از رسیدن به کف زمین چقدر است؟ (ب) اگر آتش‌نشان تیر را به طور محکمتری بغل کند، به گونه‌ای که نیروی اصطکاک متوسطی که تیر رو به بالا بر او وارد می‌کند برابر ۵۰۰N باشد، تندی او درست پیش از رسیدن به سطح زمین چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی داریم:

$E_i = E_f \Rightarrow mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v^۲ = ۲gh$

$v = \sqrt{۱۹/۶\times ۴/۳} = ۹/۱۸\ \text{m/s}$

(ب) $W_{f_k} = E_f - E_i \Rightarrow -f_k h = \frac{۱}{۲}mv^۲ - mgh$

$\frac{۱}{۲}\times ۷۰v^۲ = ۷۰\times ۹/۸\times ۴/۳ - ۵۰۰\times ۴/۳ \Rightarrow v = ۴/۷۸\text{m/s}$

۱۲۷- قطعه‌ای به جرم ۱۵kg در امتداد یک سطح افقی بدون اصطکاک، $۲/۰\text{m/s}^۲$ شتاب گرفته و تندی آن از ۱۰m/s به ۳۰m/s افزایش یافته است. (الف) تغییر در انرژی مکانیکی قطعه و (ب) آهنگ متوسطی که با آن انرژی به قطعه منتقل شده چقدر است؟ آهنگ لحظه‌ای انتقال انرژی وقتی که تندی قطعه (پ) ۱۰m/s و (ت) ۳۰m/s است، چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف)

$\Delta E = K_f - K_i = \frac{۱}{۲}m(v_f^۲ - v_i^۲) = \frac{۱}{۲}\times ۱۵((۳۰)^۲ - (۱۰۱)^۲)$
$= ۶۰۰۰\text{J}$

(ب) $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{K_f - K_i}{\Delta t}$

$v = a\Delta t + v_۰ \Rightarrow \Delta t = \frac{۳۰-۱۰}{۲} = ۱۰\text{s}$

$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{۶۰۰۰}{۱۰} = ۶۰۰\text{w}$

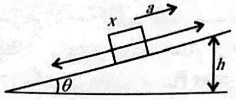
(پ) $P = Fv = mav = ۱۵\times ۲\times ۱۰ = ۳۰۰\text{w}$

(ت) $P = Fv = mav = ۱۵\times ۲\times ۳۰ = ۹۰۰\text{w}$

۱۲۸- مسئله ۱۲۷ را تکرار کنید، ولی این بار فرض کنید که قطعه روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $۵/۰°$ نسبت به افق، رو به بالا شتاب گرفته است.

حل: (الف) $\Delta E = E_f - E_i$

$E_f = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ + mgh$



$h = x\sin\theta$

$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}\times ۲\times(۱۰)^۲ + ۱۰\times ۱۰ = ۲۰۰$

$h = ۲۰۰\times\sin(۵°) = ۱۷/۴۳\ \text{m}$

$\Delta E = \frac{۱}{۲}\times ۱۵(۳۰)^۲ + ۱۵\times ۹/۸\times ۱۷/۴۳ - \frac{۱}{۲}\times ۱۵(۱۰)^۲$
$= ۸۵۶۲\ \text{J}$

(ب) $\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{۸۵۶۲}{۱۰} = ۸۵۶/۲\ \text{W}$

(پ) $F - mg\sin\theta = ma$

$F = mg\sin\theta + ma = ۱۵(۹/۸\times\sin(۵°) + ۲) = ۴۲/۸۱\text{N}$

$P = Fv = ۴۲/۸۱\times ۱۰ = ۴۲/۸۱\ \text{W}$

(پ) $P = Fv = ۴۲/۸۱\times ۳۰ = ۱۲۸۴/۳۶\ \text{W}$

۱۲۹- مساحت کشور امریکا در حدود $۸\times ۱۰^۶\ \text{km}^۲$ و ارتفاع متوسط آن ۵۰۰m (بالاتر از سطح دریا) است. متوسط بارش سالیانه ۷۵cm است. $\frac{۲}{۳}$ این باران بر اثر تبخیر به جو باز می‌گردد و بقیهٔ آن سرانجام به اقیانوس می‌ریزد. اگر کاهش انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه آب- زمین وابسته به این ریزش بتواند به طور کامل به انرژی الکتریکی تبدیل شود، توان متوسط این تبدیل چقدر خواهد بود؟ (جرم $۱\text{m}^۳$آب برابر با ۱۰۰۰kg است.)

حل: $m = \rho V = ۱۰۰۰\times[۸\times ۱۰^{۱۲}\times ۰/۷۵] = ۶\times ۱۰^{۱۵}\ \text{kg}$

$m' = \frac{۱}{۳}m = ۲\times ۱۰^{۱۵}\ \text{kg}$

$\Delta U = m'gh = ۲\times ۱۰^{۱۵}\times ۹/۸\times ۵۰۰ = ۹/۸\times ۱۰^{۱۸}\ \text{J}$

$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{۹/۸\times ۱۰^{۱۸}}{(۳۶۵\times ۸۶۴۰۰)} = ۳/۱۱\times ۱۰^{۱۱}\ \text{W}$

یک روز ۸۶۴۰۰s است.

۱۳۰- فنری با ثابت فنر $k = ۲۰۰\text{N/m}$ از سقف به طور قائم آویزان شده است، به گونه‌ای که انتهای پایینی آن در مکان $y = ۰$ قرار دارد. قطعه‌ای به وزن ۲۰N به انتهای پایینی فنر متصل می‌شود و پس از این به برای لحظه‌ای ثابت نگهداشته می‌شود، از حالت سکون رها می‌گردد. وقتی قطعه در $y = -۵/۰\text{cm}$ است (الف) انرژی جنبشی K، (ب) تغییر (از مقدار اولیه) انرژی پتانسیل گرانشی ΔU_g، و (پ) تغییر انرژی پتانسیل کشسانی ΔU_e دستگاه فنر- قطعه چقدر است؟ وقتی قطعه در $y = -۱۰\text{cm}$ است (ت) K، (ث) ΔU_g، و (ج) ΔU_e چقدر است؟ وقتی قطعه در $y = -۱۵\text{cm}$ است (چ) K، (ح) ΔU_g، و (خ) ΔU_e چقدر است؟ وقتی قطعه در $y = -۲۰\text{cm}$ (د) K، (ذ) ΔU_g، و (ر) ΔU_e چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی داریم:

$E_i = E_f \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲ - mgx$

$\frac{۱}{۲}mv^۲ = mgx - \frac{۱}{۲}kx^۲ \Rightarrow K = ۲۰\times ۰/۰۵ - \frac{۱}{۲}\times ۲۰۰(۰/۰۵)^۲$
$= ۰/۷۵\text{J}$

(ب) $\Delta U = mgh_f - mgh_i = -۲۰\times ۰/۰۵ = -۱\text{J}$

(پ) $\Delta U = \frac{۱}{۲}kx^۲ - ۰ = \frac{۱}{۲}\times ۲۰۰\times(۰/۰۵)^۲ = ۰/۲۵\text{J}$

(ت) از پایستگی انرژی داریم:

$E_i = E_f \Rightarrow ۰ = K + \frac{۱}{۲}kx^۲ - mgx$

$K = -\frac{۱}{۲}\times ۲۰۰(۰/۱)^۲ + ۲۰\times ۰/۱ = ۱\text{J}$

(ث) $\Delta U_g = -mgx = -۲\text{J}$

(ج) $\Delta U_e = \frac{۱}{۲}kx^۲ = ۱\text{J}$

(چ) از پایستگی انرژی داریم:

$$E_i = E_f \Rightarrow 0 = K + \frac{1}{2}kx^2 = mgx$$

$$K = mgx - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow K = 20\times 0/15 - \frac{1}{2}\times 200(0/15)^2 = 0/75\,\text{J}$$

$$\Delta v_y = -mgx = -3\,\text{J}$$

(ح)

$$\Delta U_e = \frac{1}{2}kx^2 = 2/25\,\text{J}$$

(خ)

$$E_i = E_f \Rightarrow 0 = K + \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

(د)

$$K = -\frac{1}{2}\times 200\times(0/2)^2 + 20\times 0/2 = 0$$

$$\Delta U_g = -mgx = -4\,\text{J}$$

(ذ)

$$\Delta U_e = \frac{1}{2}kx^2 = 4\,\text{J}$$

(ر)

۱۳۱- در هر ثانیه، $1200\,\text{m}^3$ آب از بالای آبشاری به بلندی $100\,\text{m}$ پایین می‌ریزد. $\frac{3}{4}$ انرژی جنبشی به دست آمده از سقوط آب، توسط یک مولد هیدرولیکی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. مولد با چه آهنگی انرژی الکتریکی تولید می‌کند؟ (جرم $1\,\text{m}^3$ آب برابر $1000\,\text{kg}$ است.) SSM

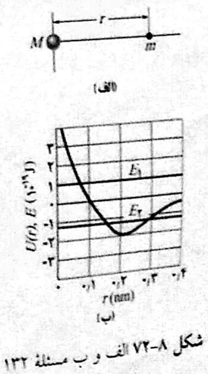
حل:

$$m = \frac{3}{4}\rho v = \frac{3}{4}\times 10^3 \times 1/2\times 10^3 = 9\times 10^5\,\text{kg}$$

$$U = mgh = 9\times 10^5 \times 9/8\times 10^2 = 8/82\times 10^8\,\text{J}$$

$$P = \frac{U}{t} = \frac{8/82\times 10^8}{1} = 8/82\times 10^8\,\text{W}$$

۱۳۲- شکل ۸-۷۲ الف مولکولی شامل دو اتم به جرمهای m و M (که $m \ll M$ است) و فاصلهٔ جدایی r را نشان می‌دهد. شکل ۸-۷۲ ب انرژی پتانسیل $U(r)$ مولکول را برحسب تابعی از r نشان می‌دهد. (الف) اگر انرژی مکانیکی کل E دستگاه دو اتمی بزرگتر از صفر (مانند E_1)، و (ب) اگر E کوچکتر از صفر (مانند E_2) باشد، حرکت اتمها را توصیف کنید. به ازای $E_1 = 1\times 10^{-19}\,\text{J}$ و $r = 0/3\,\text{nm}$، مطلوب است (پ) انرژی پتانسیل دستگاه، (ت) انرژی جنبشی کلّ اتمها، و (ث) نیروی (بزرگی و جهت) وارد بر هم اتم. به ازای چه مقدارهایی از r، نیرو (ج) رانشی، (چ) ربایشی، و (ح) صفر است؟



شکل ۸-۷۲ الف و ب مسئلهٔ ۱۳۲

حل: (الف) اگر انرژی ذره بزرگتر از صفر باشد. ذرهٔ سبکتر به سمت ذرهٔ سنگین‌تر حرکت می‌کند، در نقطهٔ r_1 انرژی جنبش آن صفر می‌شود. جهت حرکت آن تغییر می‌کند و به سمت بی‌نهایت می‌رود، یعنی پیوند دو اتم گسسته می‌شود.

(ب) در این حالت خط E_2 انرژی پتانسیل را در ۲ نقطه مقطع می‌کند. یعنی ذره در این دو جا از حرکت می‌ایستد و حرکت آن بین دو نقطه محدود است. ذره حرکت رفت و برگشت انجام می‌دهد.

(پ) با استفاده از نمودار

$$U(r) = -E_2 = -1\times 10^{-19}\,\text{J}$$

(ت)

$$E = K + U \Rightarrow K = E - U$$

$$K = 1\times 10^{-19} - (-1\times 10^{-19}) = 2\times 10^{-19}\,\text{J}$$

(ث)

$$F = \frac{-dU}{dr} \Rightarrow F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{1/1\times 10^{-19}}{0/09\times 10^{-9}} = 1/2\times 10^{-9}\,\text{N}$$

علامت منفی نشان می‌دهد نیرو از نوع جاذبه است.

(ج)

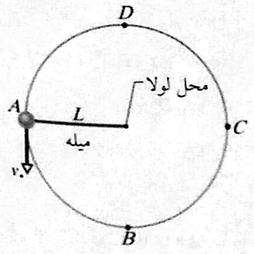
$$F = -\frac{dU}{dr}$$

هر کجا شیب نمودار مثبت باشد، نیرو از نوع جاذبه و هر کجا منفی باشد، نیرو از نوع دافعه است. چون نیرو با منفی شیب رابطه دارد. برای $r < 0/2\,\text{nm}$ نیرو رانش است.

(چ) برای $r > 0/2\,\text{nm}$ نیروی ربایشی است.

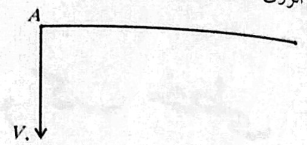
(ح) در $r = 0/2\,\text{nm}$ نیرو صفر است.

۱۳۳- گلوله‌ای به جرم m به یک سر میلهٔ صلب بدون جرمی به طول L متصل شده است (شکل ۸-۷۳). سر دیگر میله به گونه‌ای لولا شده است که گلوله روی دایره‌ای قائم حرکت کند. نخست فرض کنید هیچ اصطکاکی در محل لولا وجود ندارد. میله و گلوله از وضعیت افقی A با تندی اولیهٔ v_0 رو به پایین پرتاب می‌شوند. وقتی گلوله درست به نقطهٔ D برسد، متوقف می‌شود. (الف) رابطه‌ای برحسب L، m، و g برای v_0 به دست آورید. (ب) وقتی گلوله از نقطهٔ B می‌گذرد، کشش در میله چقدر است؟ (پ) شن کوچکی در محل لولا گذاشته می‌شود تا اصطکاک را در آنجا افزایش دهد. حال اگر گلوله با همان تندی پیشین از نقطهٔ A پرتاب شود، دقیقاً به نقطهٔ C می‌رسد. در طی این حرکت، کاهش انرژی مکانیکی چقدر است؟ (ت) پس از این که گلوله بعد از چندین نوسان سرانجام در نقطهٔ B متوقف شود، کاهش انرژی مکانیکی چقدر است؟ SSM



شکل ۸-۷۳ مسئلهٔ ۱۳۳

حل: (الف) انرژی جنبشی در D صفر است.



$$E_i = E_f$$

تراز انرژی پتانسیل را در A می‌گیریم.

$$K_f = 0 \qquad U_i = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL \Rightarrow v_0^2 = 2gL \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gL}$$

(ب)

$$T - mg = \frac{mv^2}{L}$$

$$T = \frac{mv^2}{L} + mg$$

$\frac{mv^2}{L}$ را با استفاده از پایستگی انرژی می‌یابیم:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgL + \frac{1}{2}mv^2 \qquad v_0^2 = 2gL$$

$$\frac{1}{2}m2gL = -mgL + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mv^2 = 4mgL \Rightarrow \frac{mv^2}{L} = 4mg$$

$$\Rightarrow T = mg + 4mg = 5mg$$

(پ)

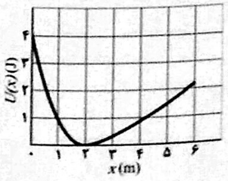
$$\Delta E = E_f - E_i = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgL$$

$$v_0^2 = 2gL$$

(ت)

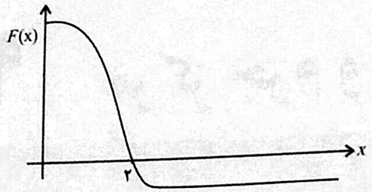
$$\Delta E = E_f - E_i = -mgL - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgL - mgL = -2mgL$$

۱۳۴- نیروی پایستار $F(x)$ روی ذره‌ای که در امتداد محور x حرکت می‌کند وارد می‌شود. شکل ۸-۷۴ نشان می‌دهد که انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به نیروی $F(x)$ چگونه با مکان ذره تغییر می‌کند. (الف) $F(x)$ را برای گسترهٔ $0 < x < 6\,\text{m}$ رسم کنید. (ب) انرژی مکانیکی E دستگاه برابر $4/0\,\text{J}$ است. انرژی جنبشی $K(x)$ ذره را مستقیماً روی شکل ۸-۷۴ رسم کنید.



شکل ۸-۷۴ مسئلهٔ ۱۳۴

حل: (الف) شکل تقریبی است.

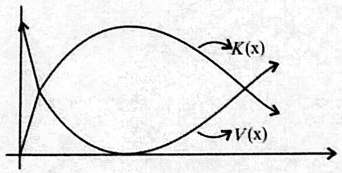


$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

(ب)

$$E = K(x) + U(x) \Rightarrow K(x) = 4 - U(x)$$

پس شکل انرژی جنبشی قرینهٔ انرژی پتانسیل است که ۴ واحد به سمت بالا انتقال یافته باشد.



۱۳۵- یک سر فنر قائمی به سقف بسته شده است و به سر دیگر آن یک کلم متصل است که به آهستگی پایین آورده می‌شود تا این که نیروی رو به بالایی که فنر بر کلم وارد می‌آورد با نیروی گرانشی وارد بر آن برابر شود. نشان دهید انرژی پتانسیل گرانشی که دستگاه کلم- زمین از دست می‌دهد دو برابر انرژی پتانسیلی است که فنر به دست می‌آورد. چرا این دو مقدار با هم برابر نیستند؟

حل:

$$F = kx \Rightarrow x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k}$$

انرژی پتانسیل گرانشی:

$$U = -mgx = -mg\frac{mg}{k} = -\frac{m^2g^2}{k}$$

انرژی پتانسیل فنر:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{m^2g^2}{k^2} = \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}$$

چون جسم به آرامی پایین می‌آید، باید یک نیروی خارجی به سمت بالا وارد شود، این نیرو کار انجام می‌دهد (کار منفی، چون خلاف جابجایی است) پس انرژی مکانیکی کل را کاهش می‌دهد.